Cálculo Diferencial e Integral III - EAD

Professor Paulo Cupertino de Lima

Sumário

0.1 Apresentação do livro

Este livro foi escrito para ser utilizado nos cursos de Educação à distância oferecidos pela UFMG para a licenciatura Matemática.

Tendo em vista que este livro é destinado a cursos à distância, o texto possui características específicas para assim ser utilizado.

Este livro introduz os conceitos de curvas de níveis, de limite, de continuidade, de derivadas parciais, de derivadas direcionais, de plano tangente a uma superfície, de diferenciabilidade de funções de duas variáveis, bem como aplicações das derivadas ao problema de máximo e mínimo de funções de duas variáveis.

Embora o foco deste livro tenha sido em funções de duas variáveis, no Apêndice consideramos funções de três variáveis, o que pode ser visto como um material suplementar, a título de complementação do material apresentado. Nele também vemos derivação implicíta e multiplicadores de Lagrange.

No Capítulo 1 fazemos uma revisão de retas, planos, cilindros e superfícies quádricas, os quais foram estudados nos cursos de Geometria Analítica e Álgebra Linear I e II. Portanto, o aluno que sentir que não tem necessidade de tal revisão, pode ir direto para o Capítulo 2, onde definimos uma função de duas variáveis (domínio, imagem e gráfico), bem como o conceito de curvas de níveis. Portanto, o material correspondente aos dois primeiros capítulos deverá ser visto na primeira aula.

No Capítulo 3 introduzimos os conceitos de limite e de continuidade para funções de duas variáveis e vemos as implicações da continuidade de uma função. O material deste capítulo deverá ser visto na segunda aula.

No Capítulo 4 introduzimos o conceito de derivadas parciais para funções de duas variáveis, damos a interpretação geométrica para as mesmas e vemos as suas propriedades. Este capítulo deverá ser visto na terceira aula.

No Capítulo 5, introduzimos os conceitos de diferenciabilidade para funções de duas variáveis e de plano tangente a uma superfície que é o gráfico de uma função diferenciável de duas variáveis. Enfatizamos o fato que o plano tangente nos permite aproximá-la locamente por algo que é linear. Também introduzimos o conceito de diferencial de uma função de duas variáveis e a sua aplicação nas aproximações envolvendo o cálculo de variações de funções de duas variáveis. Este capítulo deverá ser visto na quarta aula.

No Capítulo 6 introduzimos a Regra da Cadeia para funções de duas variáveis e generalizamos o conceito de derivadas parciais, introduzindo a derivada direcional. Também damos o significado geométrico do gradiente de uma função de duas variáveis e vemos a sua relação com as suas curvas de níveis. Este capítulo deverá ser visto na quinta aula.

No Capítulo 7, introduzimos os conceitos de máximos e mínimos locais e globais de uma função de duas variáveis, bem como o conceito de pontos críticos. Usamos as derivadas parciais para encontrar os pontos críticos de uma função diferenciável de duas variáveis, bem como a caracterização dos mesmos. Descrevemos o procedimento para encontrar os valores máximos e mínimos globais de uma função contínua definida num conjunto compacto. Finalmente, vemos aplicações envolvendo máximos e mínimos para funções de duas variáveis. Tendo a importância deste capítulo, ele será visto na sexta e na sétima aulas.

Capítulo 1

Revisão: retas, planos, superfícies cilíndricas e superfícies quádricas

Neste capítulo faremos uma revisão de retas, planos, cilindros e superfícies quádricas, vistos nos cursos de Geometria Analítica e Álgebra Linear I e II, veja [1]. O aluno que julgar desnecessário tal revisão poderá ir diretamente para o próximo capítulo.

1.1 Equações da reta

Dado um ponto $P_o(x_o, y_o, z_o)$ e um vetor não nulo $\vec{V} = (a, b, c)$, a reta que passa pelo ponto P_o e é paralela a $\vec{V}$ é o conjunto de pontos $P(x, y, z)$, tais que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_o} + t\vec{V}$, onde t é um parâmetro real. Isto nos leva às seguintes **equações paramétricas** da reta:

$$x = x_o + at, \quad y = y_o + bt \quad e \quad z = z_o + ct. \tag{1.1}$$

Se quisermos as equações paramétricas da reta que passa por dois pontos distintos $P_o(x_o, y_o, z_o)$ e $P_1(x_1, y_1, z_1)$, basta tomarmos $\vec{V} = \overrightarrow{P_oP_1} = (x_1 - x_o, y_1 - y_o, z_1 - z_o)$ na equação em (1.2).

Exercício 1.1. *Encontre as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos* $(0, 0, 1)$ *e* $(1, -1, 2)$.

Exercício 1.2. *Dados dois pontos distintos* $P_o(x_o, y_o, z_o)$ *e* $P_1(x_1, y_1, z_1)$*, verifique que as equações*

$$x = x_o(1-t) + x_1 t, \quad y = y_o(1-t)y + y_1 t \quad e \quad z = z_o(1-t) + z_1 t, \tag{1.2}$$

onde $0 \leq t \leq 1$*, descrevem os pontos do segmento de reta indo de* P_o *a* P_1.

1.2 Equações do plano

A seguir obteremos a equação do plano que passa pelo ponto $P(x_o, y_o, z_o)$ e tem $\vec{N} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ como vetor normal.

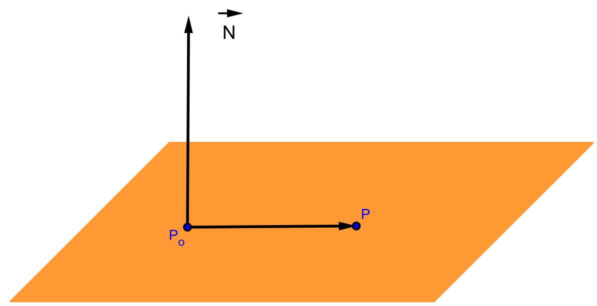

Figura 1.1: O plano que passa por $P_o(x_o, y_o, z_o)$ e tem $\vec{N}$ como vetor normal.

Se $P(x, y, z)$ for um ponto qualquer do plano, então os vetores $\overrightarrow{P_oP}$ e $\vec{N}$ são ortogonais, portanto, o produto escalar deles deve ser zero, ou seja,

$$\overrightarrow{P_oP} \cdot \vec{N} = (x - x_o, y - y_o, z - z_o) \cdot (a, b, c) = ax + by + cz - (ax_o + by_o + cz_o) = 0,$$

o que nos leva a seguinte equação para o plano

$$ax + by + cz = d, \quad onde \quad d = ax_o + by_o + cz_o. \tag{1.3}$$

Também podemos determinar a equação do plano que passa por três pontos não alinhados $P_o(x_o, y_o, z_o)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Basta observarmos que o vetor

$$\vec{N} \equiv \overrightarrow{P_oP_1} \times \overrightarrow{P_oP_2}$$

é perpendicular ao plano, então a partir dele e de um dos pontos dados, digamos P_o, usamos (1.3) e obtemos a equação do plano. Ou seja, a equação do plano é dada pelo produto misto

$$\overrightarrow{P_oP} \cdot (\overrightarrow{P_oP_1} \times \overrightarrow{P_oP_2}) = \det \begin{pmatrix} x - x_o & y - y_o & z - z_o \\ x_1 - x_o & y_1 - y_o & z_1 - z_o \\ x_2 - x_o & y_2 - y_o & z_2 - z_o \end{pmatrix} = 0.$$

Exercício 1.3. *Encontre a equação do plano que passa por* $(1, 1, 1)$ *e tem como vetor normal o vetor* $\vec{N} = (1, 2, 3)$.

Exercício 1.4. *Encontre a equação do plano que passa pelos pontos* $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ *e* $(1, 1, 1)$.

1.3 Cilindros

Definição 1.1. *Um cilindro é uma superfície constituida de todas as retas (chamadas de* ***geratrizes****) que são paralelas a uma reta dada e que passam por uma curva plana C.*

Se uma das variáveis x, y ou z estiver faltando na equação da superfície, ela será um cilindro. Neste caso, as geratrizes serão retas paralelas ao eixo correspondente a variável que está faltando.

Exemplo 1.1. *Esboce a superfície* $z = x^2$.

Solução. Como na equação da superfície falta a variável y, ela é um cilindro e as geratrizes serão retas paralelas ao eixo dos y. A curva C é a curva $z = x^2$, no plano xz. Com isso temos o cilindro mostrado na Figura 1.2. Como a curva que dá origem a ele é uma parábola, ele é chamado de **cilindro parabólico**. □

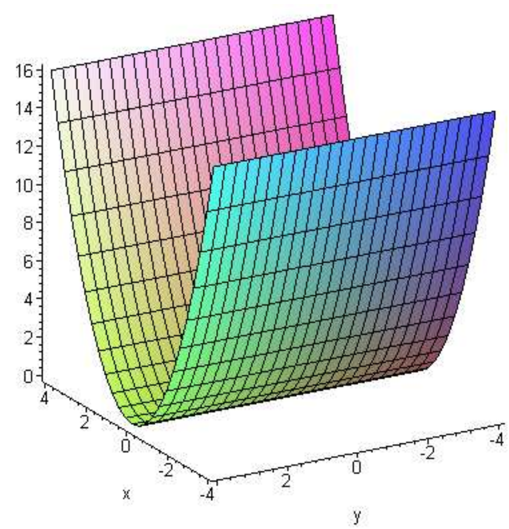

Figura 1.2: O gráfico de $z = x^2$.

1.4 Superfícies quádricas

Definição 1.2. *Uma* ***superfície quádrica*** *é uma superfície dada por uma equação de segundo grau nas três variáveis x, y e z. A sua forma mais geral é*

$$Ax^2 + by^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

onde A, B, $\ldots$, J são constantes. Por meio de rotação e translação de eixos, esta equação pode ser colocada nas formas formas

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0 \quad ou \quad Ax^2 + by^2 + Iz = 0.$$

No esboço de superfícies em geral é útil sabermos se elas têm algum tipo de simetria. Por exemplo, se a equação da superfície for invariante a troca de z por $-z$, isto significa que se (x, y, z) pertencer à superfície o mesmo acontecerá com o ponto $(x, y, -z)$, como estes dois pontos estão relacionados por reflexão através do plano $z = 0$, então a superfície também terá esta simetria; ou seja, a parte da superfície que está abaixo do plano $z = 0$, é obtida refletindo-se em $z = 0$ a parte da superfície que está acima deste (e vice-versa). As mesmas considerações se aplicam ao caso em que a equação seja invariante em relação a troca de x por $-x$ ou a troca de y por $-y$. No caso das superfícies quádricas, tais simetrias são fáceis de serem verificadas; por exemplo, se na equação da quádrica a dependência numa das variáveis x, y ou z, for com o quadrado da mesma, então ela será invariante a troca desta variável por menos ela.

No esboço de superfícies é útil considerarmos a interseção das mesmas com os planos paralelos aos planos coordenados. Tais curvas são chamadas de **traços** (ou **secções transversais**) da superfície.

A seguir veremos como usar as secções transversais nos esboços das superfícies quádricas. Sem perda de generalidade, assumiremos valores particulares para os coeficientes que aparecem nas equações das mesmas. Como as secções transversais das superfícies quádricas serão elipses, parábolas ou hiperbóles, recomendamos que o aluno faça uma revisão destas curvas.

Exemplo 1.2. (*Elipsóide*) *Esboce a superfície dada pela equação*

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1,$$

a partir das suas secções transversais.

Solução. A equação acima é invariante às trocas de x por $-x$, y por $-y$ e de z por $-z$. Logo, a superfície é simétrica em relação aos planos $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, respectivamente.

Se fizermos $z = z_o$, teremos

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 - z_o^2.$$

Como o lado esquerdo da equação acima é não negativo, devemos ter $|z_o| \leq 1$. Para $z_o = \pm 1$, a equação acima reduz-se ao ponto $(0,0)$, portanto as secções correspondentes a $z_o = 1$ e $z_o = -1$ degeneram-se aos pontos $(0,0,1)$ e $(0,0,-1)$, respectivamente. Para $|z_o| < 1$, a secção transversal é a elipse

$$\frac{x^2}{(2\sqrt{1-z_o^2})^2} + \frac{y^2}{(3\sqrt{1-z_o^2})^2} = 1,$$

cujos semi-eixos são $2\sqrt{1-z_o^2}$ e $3\sqrt{1-z_o^2}$, portanto, seus valores máximos são 2 e 3, correspondendo a $z_o = 0$.

De maneira análoga, se fizermos $x = x_o$ e $y = y_o$ deveremos ter $|x_o| \leq 1$ e $|y_o| \leq 3$, respectivamente. Teremos elipses se $|x_o| < 2$ e $|y_o| < 3$. Se $x_o = 2$ ou $x_o = -2$, as secções degeneram-se aos pontos $(2,0,0)$ e $(-2,0,0)$, respectivamente. Se $y_o = 3$ ou $y_o = -3$, as secções degeneram-se aos pontos $(0,3,0)$ e $(0,-3,0)$, respectivamente.

A partir das secções transversais obtidas acima, temos a superfície mostrada na Figura 1.3. $\square$

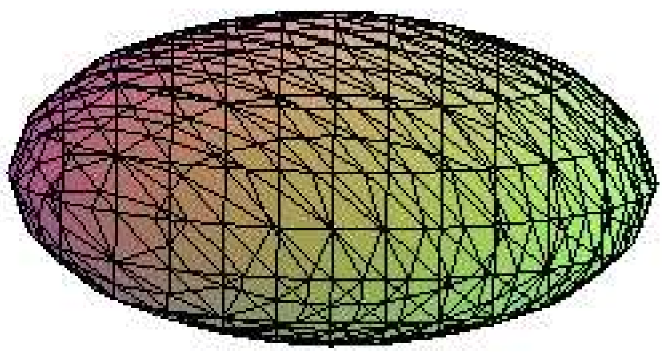

Figura 1.3: A superfície dada por $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$.

A equação mais geral de um elipsóide é dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. As constantes a, b e c são chamadas de semi-eixos do elipsóide. Se $a = b = c$ o elipsóide degenera-se a uma superfície esférica.

Exemplo 1.3. (*Parabolóide elíptico*) *Esboce a superfície dada pela equação*

$$z = 2x^2 + y^2,$$

a partir das suas secções transversais.

Solução. Note que a equação acima é invariante a troca de x por $-x$ e de y por $-y$, logo o seu gráfico será simétrico em relação aos planos $x = 0$ e $y = 0$, respectivamente.

A secção transversal da superfície com o plano $z = z_o$ é

$$2x^2 + y^2 = z_o,$$

como o lado esquerdo da equação acima é não negarivo, devemos tomar $z_o \geq 0$. Para $z_o = 0$, a secção se degenera ao ponto $(0, 0, 0)$ e para os demais valores de z_o, temos as elipses

$$\frac{x^2}{(\sqrt{z_o/2})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{z_o})^2} = 1.$$

Se fizermos $x = x_o$ ou $y = y_o$, as secções transversais serão as parábolas

$$z = y^2 + 2x_o^2,$$

e

$$z = 2x^2 + y_o^2.$$

A partir das secções transversais obtidas acima, temos a superfície mostrada na Figura 1.4. $\square$

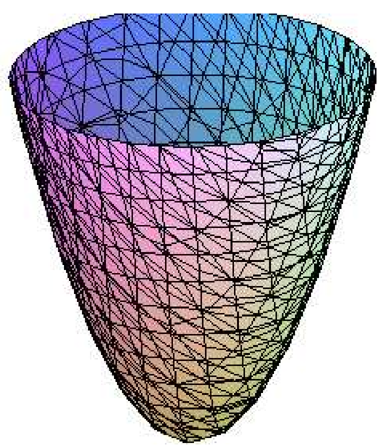

Figura 1.4: A superfície dada por $z = 2x^2 + y^2$.

A equação mais geral de um parabolóide eliptico tendo z como eixo de simetria é dada por $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$. Nesta expressão podemos trocar o z pelo x ou o z pelo y e teremos parabolóides elípticos também, por exemplo, $x = 2x^2 + 3z^2$ ou $y = x^2 + z^2$.

Exemplo 1.4. (*Parabolóide de hiperbólico*) *Esboce a superfície dada pela equação*

$$z = x^2 - y^2,$$

a partir das suas secções transversais.

Solução. Note que a equação acima é invariante a troca de x por $-x$ e de y por $-y$, logo a superfície será simétrica em relação aos planos $x = 0$ e $y = 0$, respectivamente.

As secções da superfície com o plano $z = z_o$ é

$$x^2 - y^2 = z_o.$$

Portanto, se $zo = 0$, temos as retas $y = x$ e $y = -x$. Para valores de $z_o > 0$, temos as hipérboles

$$\frac{x^2}{\sqrt{z_o}} - \frac{y^2}{\sqrt{z_o}} = 1,$$

e para $z_o < 0$, temos as hipérboles

$$\frac{y^2}{\sqrt{z_o}} - \frac{x^2}{\sqrt{z_o}} = 1.$$

As assíntotas da hipérboles são as retas $y = x$ e $y = -x$. Os eixos de simetrias das hipérboles serão o eixo dos x, se $z_o > 0$ e o eixo dos y, se $z_o < 0$. Os vértices das hipérboles se afastam da origem à medida em que $|z_o|$ aumenta.

Se fizermos $x = x_o$, temos a parábola

$$z = -y^2 + x_o^2,$$

cujo vértice se encontra sobre o semi-eixo z positivo e se afasta da origem à medida em que $|x_o|$ aumenta.

De maneira análoga, se fizermos $y = y_o$, temos a parábola

$$z = x^2 - y_o^2,$$

cujo vértice se encontra sobre o semi-eixo z negativo e se afasta da origem à medida em que $|y_o|$ aumenta.

A partir das secções transversais obtidas acima, temos a superfície mostrada na Figura 1.5, a qual tem a forma de uma sela. □

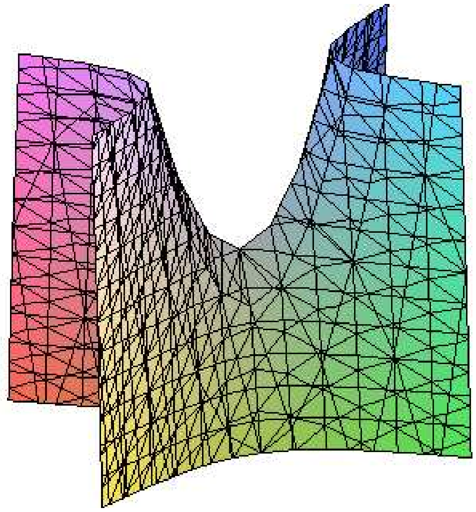

Figura 1.5: A superfície dada pela equação $z = x^2 - y^2$.

A equação mais geral de um parabolóide hiperbólico como o descrito acima é dada por $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$. Também podemos trocar z por x ou z por y nesta expressão que ainda teremos um parabolóide hiperbólico. Por exemplo, podemos ter $x = y^2 - z^2$ ou $y = z^2 - y^2$.

Exemplo 1.5. (*Hiperbolóide de uma folha*) *Esboce a superfície dada pela equação*

$$\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1,$$

a partir das suas secções transversais.

Solução. A equação acima é invariante à troca de x por $-x$, de y por $-y$ e de z por $-z$, logo a superfície é simétrica em relação aos planos $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, respectivamente.

Se fizermos $z = z_o$, teremos as elipses

$$\frac{x^2}{(\sqrt{4 + z_o^2})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{4 + z_o^2}/2)^2} = 1.$$

Se fizermos $x = x_o$, teremos

$$y^2 - \frac{z^2}{4} = 1 - \frac{x_o^2}{4}.$$

Portanto, se $x_o = \pm 2$, teremos as retas $z = 2y$ e $z - 2y$. Se $|x_o| < 2$, teremos a hipérbole

$$\frac{y^2}{(\sqrt{4 - x_o^2}/2)^2} - \frac{z^2}{(\sqrt{4 - x_o^2})^2} = 1$$

e se $|z_o| > 2$, teremos a hipérbole

$$\frac{z^2}{(\sqrt{x_o^2 - 4})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{x_o^2 - 4}/2)^2} = 1.$$

De maneira análoga, se fizermos $y = y_o$, teremos

$$\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1 - y_o^2,$$

portanto se $|y_o| = 1$, teremos as retas $z = x$ e $z = -x$. Se $|y_o| < 1$, teremos a hipérbole

$$\frac{x^2}{(2\sqrt{1 - y_o^2})^2} - \frac{z^2}{(2\sqrt{1 - y_o^2})^2} = 1,$$

e se $|y_o| > 1$, teremos a hipérbole

$$\frac{z^2}{(2\sqrt{y_o^2 - 1})^2} - \frac{x^2}{(2\sqrt{y_o^2 - 1})^2} = 1.$$

A partir das secções transversais obtidas acima, temos a superfície mostrada na Figura 1.6. □

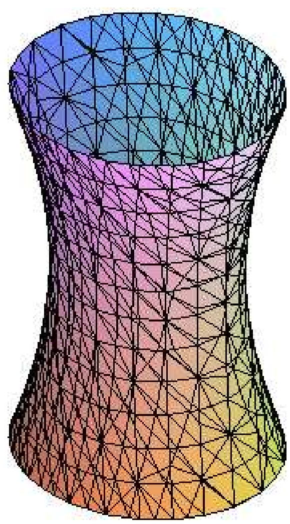

Figura 1.6: A superfície dada pela equação $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$.

A equação mais geral de um hiperbolóide de uma folha como o descrito acima é dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Também podemos trocar z por x ou z por y nesta expressão que ainda teremos um hiperbolóide de uma folha.

Exemplo 1.6. (*Hiperbolóide de duas folhas*) *Esboce a superfície dada pela equação*

$$-x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1,$$

a partir das suas secções transversais.

Solução. A equação acima é invariante à troca de x por $-x$, de y por $-y$ e de z por $-z$, logo a superfície é simétrica em relação aos planos $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, respectivamente.

Se fizermos $z = z_o$, teremos

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = z_o^2 - 1.$$

Como o lado esquerdo da equação acima é não negativo, devemos tomar $|z_o| \geq 1$. Se $z_o = 1$ e $z_o = -1$, as secções degeneram-se nos pontos $(0,0,1)$ e $(0,0,-1)$, respectivamente. Para $|z_o| > 1$, teremos as elipses

$$\frac{x^2}{(\sqrt{z_o^2 - 1})^2} + \frac{y^2}{(2\sqrt{z_o^2 - 1})^2} = 1.$$

Se fizermos $x = x_o$, teremos as hipérboles

$$\frac{z^2}{(\sqrt{1 + x_o^2})^2} - \frac{y^2}{(2\sqrt{1 + x_o^2})^2} = 1.$$

Se fizermos $y = y_o$, teremos as hipérboles

$$\frac{z^2}{(\sqrt{4 + y_o^2}/2)^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{4 + y_o^2}/2)^2} = 1.$$

A partir das secções transversais obtidas acima, temos a superfície mostrada na Figura 1.7. □

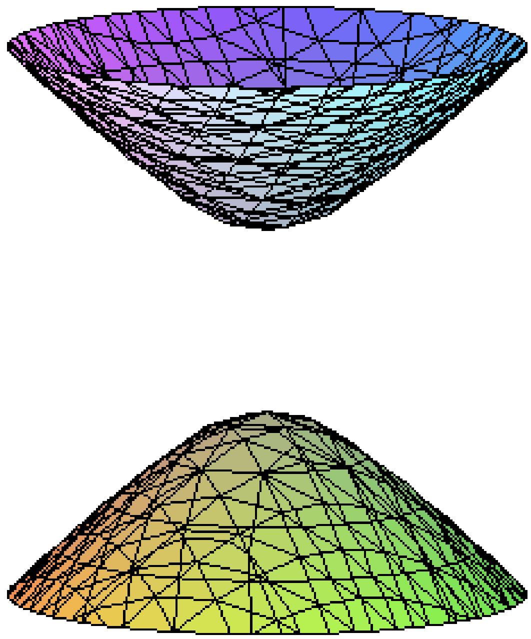

Figura 1.7: A superfície dada pela equação $-x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$.

A equação mais geral de um hiperbolóide de duas folhas como o descrito acima é dada por $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Também podemos trocar z por x ou z por y nesta expressão que ainda teremos um hiperbolóide de duas folhas, por exemplo, $-z^2 - y^2 + x^2 = 1$ e $-x^2 - z^2 + y^2 = 1$.

Exemplo 1.7. (*Cone elíptico*) *Esboce a superfície dada pela equação*

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = z^2,$$

a partir das suas secções transversais.

Solução. A equação acima é invariante à troca de x por $-x$, de y por $-y$ e de z por $-z$, logo ela é simétrica em relação aos planos $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, respectivamente.

Se fizermos $z = z_o$, teremos

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = z_o^2.$$

Portanto, se $z_o = 0$ a secção degenera-se ao ponto $(0, 0, 0)$. Para $z_o \neq 0$, temos as elipses

$$\frac{x^2}{(\sqrt{|z_o|})^2} + \frac{y^2}{(3\sqrt{|z_o|})^2} = 1.$$

Se fizermos $x = x_o$, teremos

$$z^2 - \frac{y^2}{9} = x_o^2.$$

Portanto, se $x_o = 0$, teremos as retas $z = y/3$ e $z = -y/3$. Para $x_o \neq 0$, teremos as hipérboles

$$\frac{z^2}{(\sqrt{|x_o|})^2} - \frac{y^2}{(3\sqrt{|x_o|})^2} = 1.$$

Se fizermos $y = y_o$, teremos

$$z^2 - x^2 = \frac{y_o^2}{9}.$$

Portanto, se $y_o = 0$, teremos as retas $z = x$ e $z = -x$. Para $y_o \neq 0$, teremos as hipérboles

$$\frac{z^2}{(|y_o|/3)^2} - \frac{x^2}{(|y_o|/3)^2} = 1.$$

A partir das secções transversais obtidas acima, temos a superfície mostrada na Figura 1.8. □

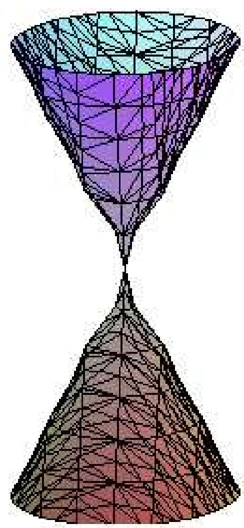

Figura 1.8: A superfície dada pela equação $x^2 + \frac{y^2}{9} = z^2$.

A equação mais geral de um cone com duas folhas como o descrito acima é dada por $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$. Também podemos trocar z por x ou z por y nesta expressão que ainda teremos um cone com duas duas folhas.

Exemplo 1.8. *Dada a curva $y = f(x)$ no plano $z = 0$, onde inversa $x = f^{-1}(y)$ existe, determine uma equação para a superfície gerada, girando esta curva em torno do eixo y.*

Solução. Como a superfície dada é uma superfície de revolução obtida ao girarmos $y = f(x)$ em torno do eixo y, as suas secções transversais com os planos $y = y_o$ são as circunferências

$$x^2 + z^2 = r^2, \quad y = y_o,$$

onde $r = r(y_o)$. Para calcularmos $r(y_o)$, podemos tomar o ponto desta circunferência que está no plano $z = 0$ e sobre a curva $y = f(x)$. Logo, $x = f^{-1}(y_o)$ e $r = |x|$, donde concluimos que $r = |f^{-1}(y_o)|$. Logo a secção transversal da superfície com o plano $y = y_o$ é

$$x^2 + z^2 = \left(f^{-1}(y_o)\right)^2, \quad y = y_o.$$

Por outro lado, dada a equação de uma superfície, a sua secção transversal com $y = y_o$ é obtida fazendo-se $y = y_o$ na equação da mesma. Portanto, uma equação da superfície é

$$x^2 + z^2 = \left(f^{-1}(y)\right)^2.$$

□

Exemplo 1.9. *Encontre a equação da superfície que descreve o lugar geométrico dos pontos (x, y, z) que são equidistantes de $P_o(-1, 0, 0)$ e do plano $x = 1$.*

Solução. Se um ponto $P(x, y, z)$ está na superfície, então a distância de P a P_o deve ser igual a distância de P ao plano $x = 1$. Por outro lado,

$$dist(P, P_o) = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2}$$

e a distância de P ao plano $x = 1$ é a distância de $P(x, y, z)$ ao ponto do plano $x = 1$ mais próximo de P, o qual é $Q(1, y, z)$. Portanto,

$$dist(P, Q) = \sqrt{(x-1)^2}.$$

Portanto, devemos ter

$$dist(P, P_o) = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x-1)^2} = dist(P, Q).$$

Tomando o quadrado desta equação, temos

$$(x+1)^2 + y^2 + z^2 = (x-1)^2.$$

Após simplificação, encontramos

$$x = -\frac{y^2 + z^2}{4},$$

que é o parabolóide de revolução, obtido girando-se a curva $x = -y^2/4$, $z = 0$, em torno do eixo x. Sugerimos que o leitor esboce esta superfície. □

Exercício 1.5. *Esboce gráfico das superfícies dadas pelas equações abaixo:*

(a) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
(b) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
(c) $y^2 + 9z^2 = 9$
(d) $z = 1 - x^2$
(e) $x - y^2 = 1$
(f) $yz = 1$
(g) $z = \cos y$

Exercício 1.6. *Para cada uma das equações abaixo, identifique e esboce superfície associada.*

(a) $z^2 = 2x^2 + 4y^2 + 36$
(b) $x^2 = y^2 + 4z^2$
(c) $4x - 2y^2 + 4z^2 = 0$
(d) $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4y - 24z + 36 = 0$
(e) $x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z + 2 = 0$
(f) $z^2 = 4x^2 + y^2 + 8x - 2y + 4z$.

Exercício 1.7. *Esboce a região delimitada pelas superfícies* $z = x^2 + y^2$ *e* $z = 4 - x^2 - y^2$.

Exercício 1.8. *Determine uma equação para a superfície gerada fazendo girar a curva em torno do eixo.*

(a) $y = 4x^2$, $(z = 0)$, *em torno do eixo* y.
(b) $y = 2x$, $(z = 0)$, *em torno do eixo* y.

Exercício 1.9. *Determine a equação da superfície consistindo de todos os pontos* (x, y, z) *que são equidistantes do ponto* $(0, 0, 1)$ *e do plano* $z = -2$. *Identifique a superfície.*

Capítulo 2

Função de duas variáveis

O objetivo desta aula é introduzir os conceitos de função de duas variáveis e de curvas de níveis de tais funções. No final desta aula, o aluno deverá ser capaz de:

1. Encontrar o domínio de uma função de duas variáveis.
2. Saber o significado das curvas de níveis de uma função, bem como obtê-las e esboçá-las.
3. Fazer um esboço qualitativo de uma superfície, a partir das suas curvas de níveis.

2.1 Domínio, imagem e gráfico de uma função de duas variáveis

No curso de Cálculo I, foram introduzidos os conceitos de domínio, de imagem e de gráfico de uma função de uma variável. Nesta seção estenderemos tais conceitos para funções de duas variáveis.

No caso de uma função de uma variável, o seu gráfico é uma curva no plano, já os gráficos de funções de duas variáveis serão superfícies no espaço. Algumas destas superfícies foram vistas no curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear II, dentre elas estão os planos, os cilindros e as superfícies quádricas. No Capítulo 1, fizemos uma revisão das mesmas.

Definição 2.1. *Uma função de f de duas variáveis é uma regra que associa a cada par ordenado de número reais (x, y) de um subconjunto D do $\mathbb{R}^2$, um único número real denotado por $f(x, y)$. O conjunto D é o **domínio de** f e a sua **imagem** é o conjunto dos valores possíveis de $f(x, y)$, ou seja, $\{f(x, y) \ : \ (x, y) \in D\}$. O **gráfico de** f é o conjunto de pontos do $\mathbb{R}^3$ dado* *por $\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$, ele representa uma superfície no espaço. Se f for dada por uma fórmula e seu domínio não for especificado, estará implicito que ele é o conjunto de todos os (x, y) para os quais a regra está bem definida, no sentido que ela nos dê um número real.*

As definições acima se estendem de maneira natural para uma função de mais de duas variáveis.

Exemplo 2.1. *Encontre o domínio da função $f(x, y) = \sqrt{x + y}$.*

Solução. Como estamos assumindo que a imagem de f tem que ser um número real, o argumento da função raiz quadrada deve ser não negativo, ou seja, devemos ter $x + y \geq 0$, o que geometricamente é a região do plano xy que está acima da reta $y = -x$, incluindo a própria reta. $\square$

Exemplo 2.2. *Encontre o domínio da função $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$.*

Solução. Como estamos assumindo que a imagem de f tem que ser um número real, o argumento da função logaritmo deve ser positivo, ou seja, $9 - x^2 - 9y^2 > 0$, o que geometricamente representa a região do plano xy exterior à elipse $\frac{x^2}{3^2} + y^2 = 1$. $\square$

Exemplo 2.3. *Encontre o domínio da função $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2)$.*

Solução. Como a função f pode ser vista como a soma das funções $\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ e $\ln(4 - x^2 - y^2)$, o seu domínio será a interseção dos domínios das mesmas, ou seja, temos que tomar (x, y) de modo que eles satisfaçam simultaneamente as as seguintes desigualdades:

$$x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \quad e \qquad 4 - x^2 - y^2 > 0,$$

ou seja, $1 \leq x^2 + y^2 < 2^2$, o que geometricamente é a região do plano xy entre os circulos centrados na origem e de raios 1 e 2, incluindo os pontos do círculo de raio 1 e excluindo-se os pontos do círculo de raio 2. $\square$

Exemplo 2.4. *Encontre o domínio da função $f(x, y) = \frac{\sqrt{y - x^2}}{\ln(x^2 + y^2 - 4)}$.*

Solução. Como f é a razão das funções $\sqrt{y - x^2}$ e $\ln(x^2 + y^2 - 4)$, devemos tomar a interseção dos domínios destas e excluir dela os pontos onde o denominador se anula. Ou seja, queremos que

$$y - x^2 \geq 0, \;\; x^2 + y^2 - 4 > 0 \; e \;\; x^2 + y^2 - 4 \neq 1,$$

ou seja,

$$y \geq x^2, \;\; x^2 + y^2 > 4 \; e \; x^2 + y^2 \neq 5,$$

o que geometricamente é a região do plano que está acima da parábola $y = x^2$ e exterior ao círculo $x^2 + y^2 = 4$, da qual tiramos os pontos que estão no círculo $x^2 + y^2 = 5$. $\square$

Exercício 2.1. *Determine e esboce os domínios da funções dadas.*

(a) $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
(b) $f(x,y) = \sqrt{xy}$
(c) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$
(d) $f(x,y) = \frac{1}{e^x+e^y}$
(e) $f(x,y) = \sqrt{y-x}\ \ln(x+y)$
(f) $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$
(g) $f(x,y) = \sqrt{1-x} - e^{x/y}$
(h) $f(x,y) = \ln(xy)$
(i) $f(x,y) = \frac{1}{x-y^2}$.

2.2 Curvas de níveis

Gráficos nos fornecem uma maneira de visualizarmos funções de duas variáveis. A outra maneira de visualizarmos tais funções é desenhar as suas curvas de níveis, as quais serão definidas abaixo.

Definição 2.2. *Seja $z = f(x,y)$ uma função de duas variáveis e k um número real. O conjunto dos pontos (x,y) no domínio de f para os quais $f(x,y) = k$ é chamado de uma* ***curva de nível*** *de f. Ela contém os pontos do domínio de f para os quais o gráfico de f tem altura k. Ao esboçarmos a curva de nível no plano xy, devemos associar a ela o seu correspondente valor de k.*

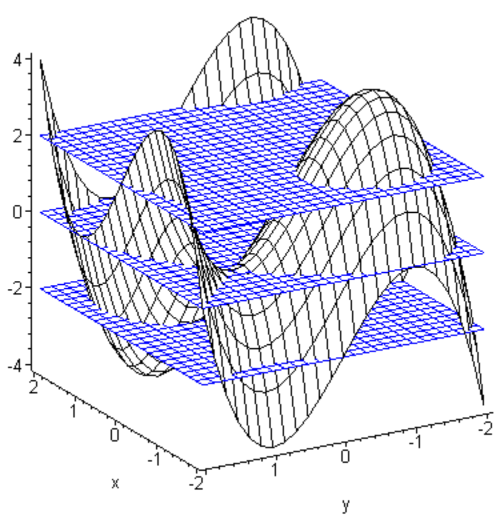

Figura 2.1: O gráfico de $f(x,y)$ e planos horizontais dados por $z = k$ (representados em azul).

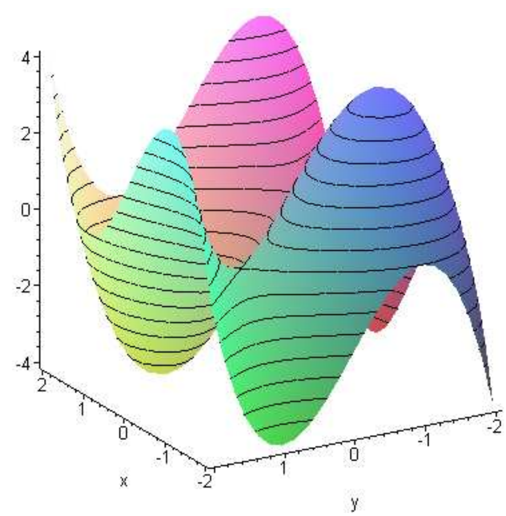

Figura 2.2: Para cada k, a interseção do plano $z = k$ com o gráfico de f nos dá uma curva que chamamos de **traço horizontal do gráfico de f no plano $z = k$**

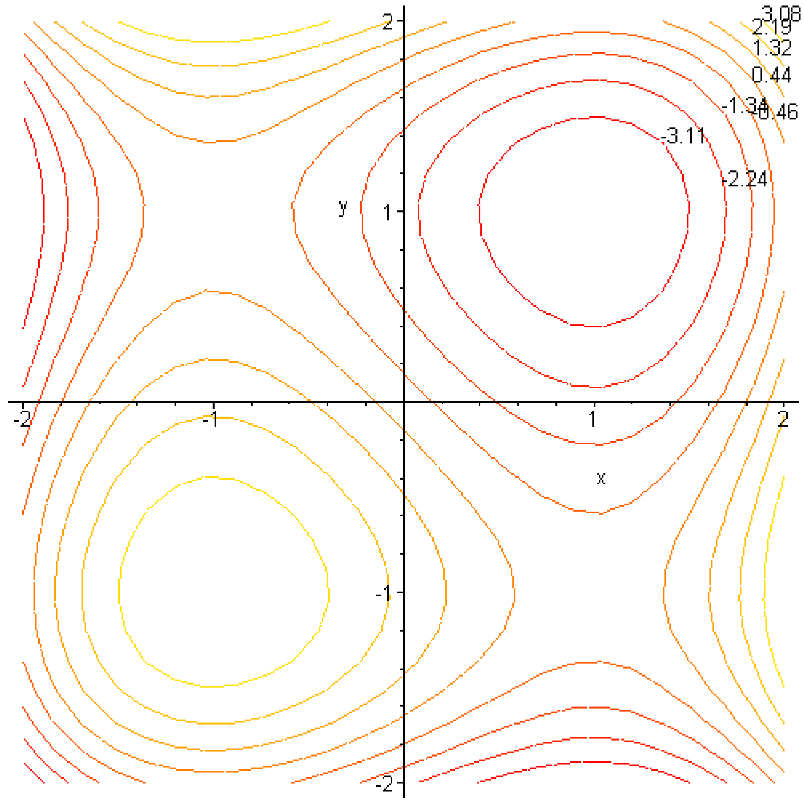

Figura 2.3: Curvas de níveis da função $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$ (seu gráfico aparece nas Figuras 2.1 e 2.2), elas foram obtidas com auxílio do programa Maple.

Em cartografia, uma curva de nível, normalmente chamada de **contorno**, une pontos de mesma elevação (altura), relativamente ao nível do mar. Se a função $f(x,y)$ for a temperatura, então as curvas de níveis ligarão pontos que têm a mesma temperatura e elas são chamadas de **isotérmicas**.

Ao tomarmos os traços horizontais do gráfico de f com $z = k$, veja Figura 2.2, fatiamos o gráfico de $f(x,y)$ em curvas, cujas projeções no plano xy nos dão as curvas de níveis de f. A partir destas, podemos fazer o processo inverso, ou seja, podemos esboçar o gráfico de f. Isto é feito da seguinte maneira: para cada k elevamos a curva de nível $f(x,y) = k$ até o plano $z = k$, obtendo o traço horizontal do gráfico de f no plano $z = k$. O gráfico de $f(x,y)$ é a união de todos os traços assim obtidos. Também a partir das curvas de níveis de uma função, podemos estimar os seus valores.

Exemplo 2.5. *Seja $f(x,y) = 2x + 3y + 3$, então as suas curvas de níveis são as retas*

$$2x + 3y + 3 = k,$$

as quais têm coeficientes angulares iguais a $-2/3$. Nas Figuras 2.4 e 2.5 mostramos as curvas de níveis de $f(x,y)$ e o esboço do seu gráfico a partir das mesmas.

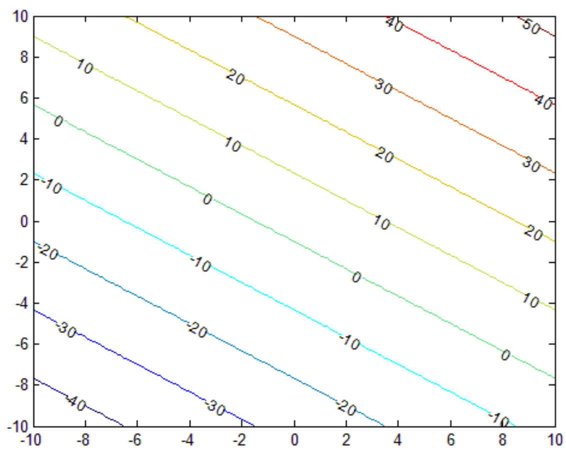

Figura 2.4: As curvas de níveis de $2x + 3y + 3$.

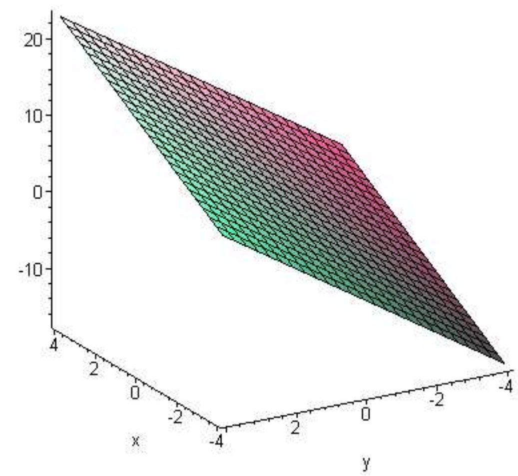

Figura 2.5: O gráfico de $2x + 3y + 3$

Exemplo 2.6. *Seja $f(x,y) = 2x^2 + y^2$, então as curvas de níveis de $f(x,y)$ são dadas por*

$$2x^2 + y^2 = k,$$

onde $k \geq 0$. Para $k = 0$, a curva de nível degenera ao ponto $(0,0)$, enquanto que para valores positivos de k temos elipses as

$$\frac{x^2}{(\sqrt{k/2})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{k})^2} = 1.$$

Nas Figuras 2.6 e 4.1 mostramos as curvas de níveis de $f(x,y)$ e o esboço do seu gráfico a partir das mesmas.

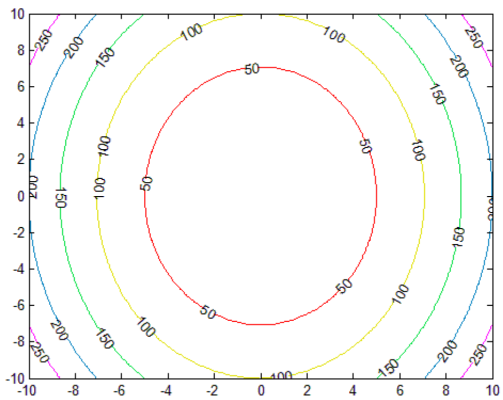

Figura 2.6: As curvas de níveis de $2x^2 + y^2$.

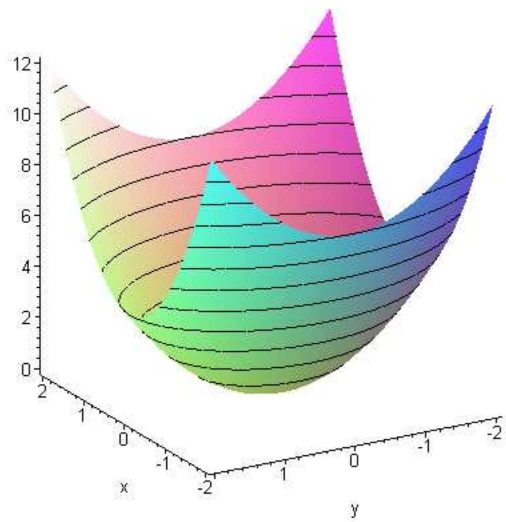

Figura 2.7: O gráfico de $2x^2 + y^2$.

Exemplo 2.7. *Seja $f(x,y) = x^2 - y^2$. As suas curvas de níveis são as curvas*

$$x^2 - y^2 = k,$$

onde k é real. Note que para $k = 0$, temos as retas $y = x$ e $y = -x$.

Para valores de $k \neq 0$, temos as hipérboles $x^2 - y^2 = k$, cujas as assíntotas são as retas $y = \pm x$. Os eixos de simetrias das hipérboles serão o eixo dos x, se $k > 0$ e o eixo dos y, se $k < 0$. Os vértices das hipérboles se afastam da origem à medida em que $|k|$ aumenta, veja Figura 2.8*. A superfície correspondente ao gráfico de f é o parabolóide hiperbólico, ele é esboçado a partir das curvas de níveis de $x^2 - y^2$, veja Figura* 2.9*.*

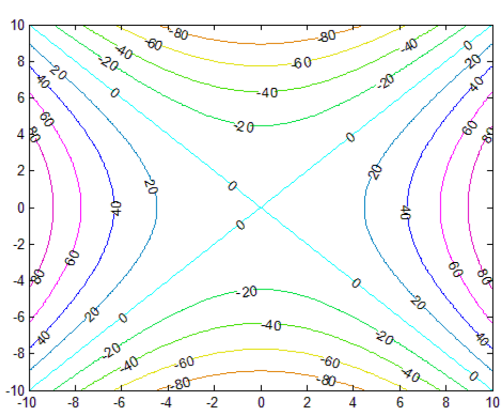

Figura 2.8: As curvas de níveis de $x^2 - y^2$.

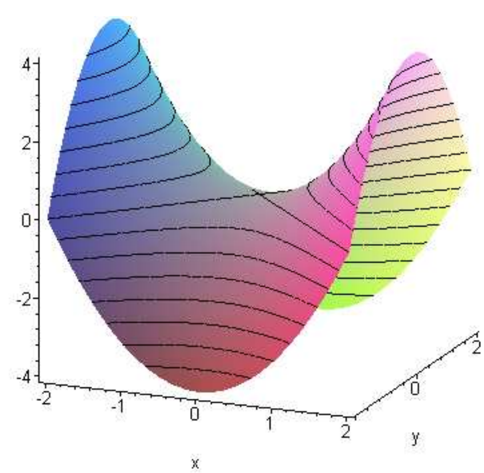

Figura 2.9: O gráfico de $x^2 - y^2$.

Exemplo 2.8. *Esboce a superfície*

$$z = x^2 - y$$

a partir das suas curvas de níves.

Solução. As curvas de níveis de $z = x^2 - y$ são as parábolas

$$y = x^2 - k, \quad z = 0,$$

onde k é real. A secção transversal da superfície com plano $z = k$ é a parábola

$$y = x^2 - k, \quad z = k, \tag{2.1}$$

o seu vértice é o ponto $(0, -k, k)$. Por outro lado, o conjunto de pontos da forma $(0, -k, k)$, com k real, representa uma parametrização da reta $x = 0$, $z = -y$. Portanto, para esboçarmos a superfície basta desenharmos esta reta e para cada ponto dela desenhamos a parábola com vértice no mesmo, a qual é descrita pela equação (2.1). A superfície assemelha-se com uma telha colonial, veja Figura 2.10. $\square$

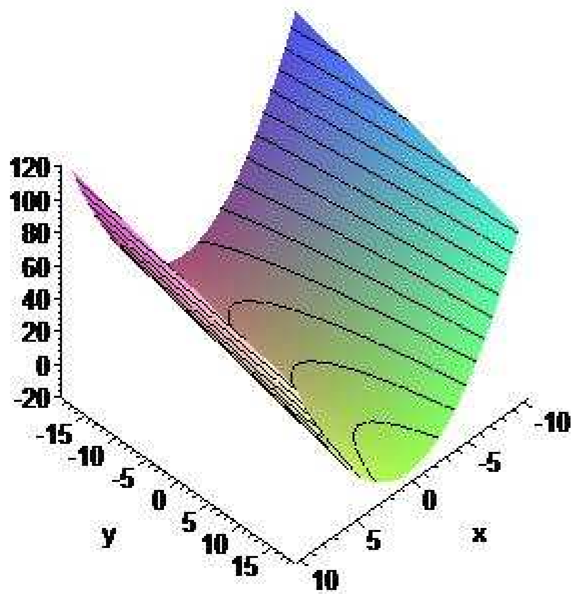

Figura 2.10: A superfície dada pela equação $z = x^2 - y$.

Exercício 2.2. *Seja* $f(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2+1}$. *Mostre que uma das suas curvas de níveis é uma reta e as demais são círculos, veja Figura 2.11.*

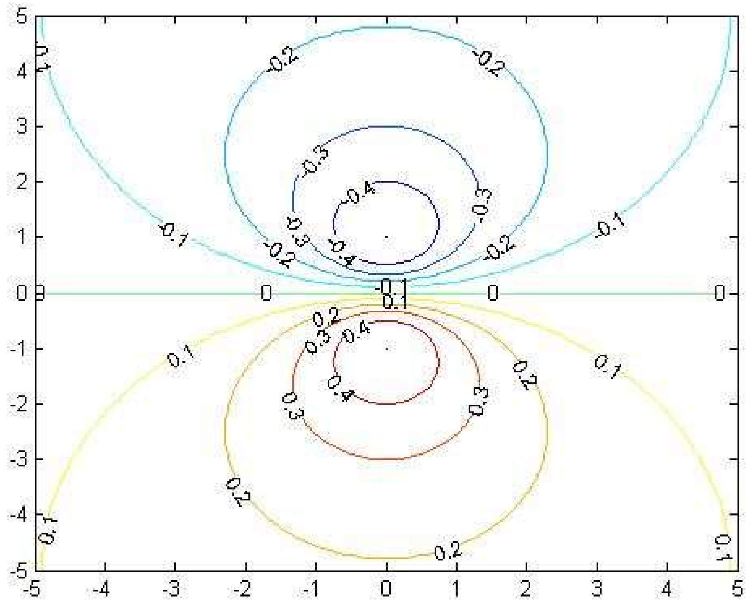

Figura 2.11: Curvas de níveis de $f(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2+1}$..

Exercício 2.3. *Encontre algumas curvas de níveis das funções abaixo e tente visualizar as superfícies correspondentes, a partir das mesmas.*

(a) $f(x,y) = \frac{y}{x}$
(b) $f(x,y) = x + y$
(c) $f(x,y) = x - y^2$
(d) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$
(e) $f(x,y) = y^2 - x^2$
(f) $f(x,y) = x^2 + y^2$
(g) $f(x,y) = xy$
(h) $f(x,y) = \text{sen } (x+y)$
(i) $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$.
(j) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}$

Exercício 2.4. *Com auxílio de um computador, obtenha o diagrama de contornos das funções abaixo.*

(a) $f(x,y) = xy^2 - x^3$
(b) $f(x,y) = xy^3 - yx^3$
(c) $f(x,y) = x^3 + y^3$
(d) $f(x,y) = \text{sen}(ye^{-x})$.

Capítulo 3

Limite e Continuidade

O objetivo desta aula é generalizar os conceitos de limite e de continuidade (vistos para funções de uma variável) para funções de duas variáveis. Ao terminar esta aula, o aluno deverá ser capaz de capaz de

1. Entender as definições formais de limite e de continuidade, bem como a intuição por trás destes dois conceitos.
2. Calcular limites de funções de duas variáveis, caso ele exista e, se ele não existir, saber provar a não existência do mesmo.
3. Saber quais são as implicações da continuidade de uma função.

3.1 Limite

No que se segue, denotaremos por $B(x_o, y_o; r)$, conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, para os quais $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 < r^2$. Este conjunto será chamado de **bola aberta** de raio r, centrada em (x_o, y_o).

Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Dizemos que $(x_o, y_o) \in D$ é um **ponto interior** de D, se existir $r > 0$, tal que $B(x_o, y_o; r)$ esteja contido em D. Dizemos que D é **aberto**, se todos os seus pontos forem interiores. Dizemos que um conjunto D é **fechado**, se o seu complementar em relação a $\mathbb{R}^2$, ou seja, $\mathbb{R}^2 - D$, for aberto. Dizemos que D é **limitado**, se existir r finito, tal que $D \subset B(0, 0; r)$. Um ponto (x_o, y_o) em $\mathbb{R}^2$ está na **fronteira** do conjunto D, se para todo $r > 0$ a bola $B(x_o, y_o, r)$ contiver pontos que pertecem a D e pontos que não pertecem a D. Dizemos que D é **compacto**, se ele for fechado e limitado.

Exercício 3.1. *Em cada um dos conjuntos abaixo, diga se ele é aberto, fechado, nem aberto nem fechado, ou fechado e aberto.*

(a) $(1,2)$
(b) $[-2,5]$
(c) $(0,6)$
(d) $(1,5]$
(e) $\{(x,y) \ : \ x^2+y^2<1\}$
(f) $\{(x,y) \ : \ x^2+y^2>1\}$
(g) $\{(x,y) \ : \ x^2+y^2\leq 1\}$
(h) $\{(x,y) \ : \ x^2+y^2=1\}$
(i) $\{(x,y) \ : \ -1<x\leq 3, \ -2\leq y<1\}$
(j) $\mathbb{R}^2$.

Dizemos que um subconjunto $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^2$ é uma **vizinhança** de (x_o, y_o), se este ponto for um ponto interior de $\mathcal{N}$. Toda bola centrada em (x_o, y_o) é uma vizinhança deste ponto e qualquer vizinhança de (x_o, y_o) contém uma bola aberta centrada em (x_o, y_o). Contudo, vizinhanças não precisam ter um formato particular.

Uma **vizinhança deletada** de um ponto (x_o, y_o) é uma vizinhança deste ponto, da qual tiramos o próprio ponto (x_o, y_o). Por exemplo, a bola $B(x_o, y_o; \delta)$ menos o ponto (x_o, y_o) é uma vizinhança deletada de (x_o, y_o).

Seja $f(x,y)$ uma função definida em todos os pontos numa vizinhança de um ponto (x_o, y_o), exceto possivelmente, no próprio (x_o, y_o). Muitas vezes queremos saber o que acontece com f à medida em que tomamos pontos (x,y) do domínio de f, cada vez mais próximos de (x_o, y_o), o que nos motiva a definição seguinte.

Definição 3.1. *Consideremos uma função $f : D \to \mathbb{R}$, onde D é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ contendo uma vizinhança deletada do ponto (x_o, y_o). Dizemos que $f(x,y)$ converge para um número real L, quando $(x,y) \in S$ tende a (x_o, y_o) e escrevemos*

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = L,$$

se, e somente se, para todo número $\epsilon > 0$ for possível encontrar um número $\delta > 0$, tal que $|f(x,y) - L| < \epsilon$, sempre que $(x,y) \in D$ e $0 < \sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2} < \delta$, veja Figura 3.1*.*

Na definição acima, o ϵ mede a proximidade de $f(x,y)$ a L, enquanto que o δ mede a proximidade de (x,y) a (x_o, y_o). Portanto, dizer que $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = L$, significa que podemos tornar os valores de $f(x,y)$ tão próximos de L quando queiramos, desde que tomemos (x,y) suficientemente próximos de (x_o, y_o), porém diferentes de (x_o, y_o), pois a função f não precisa estar definida no próprio ponto (x_o, y_o).

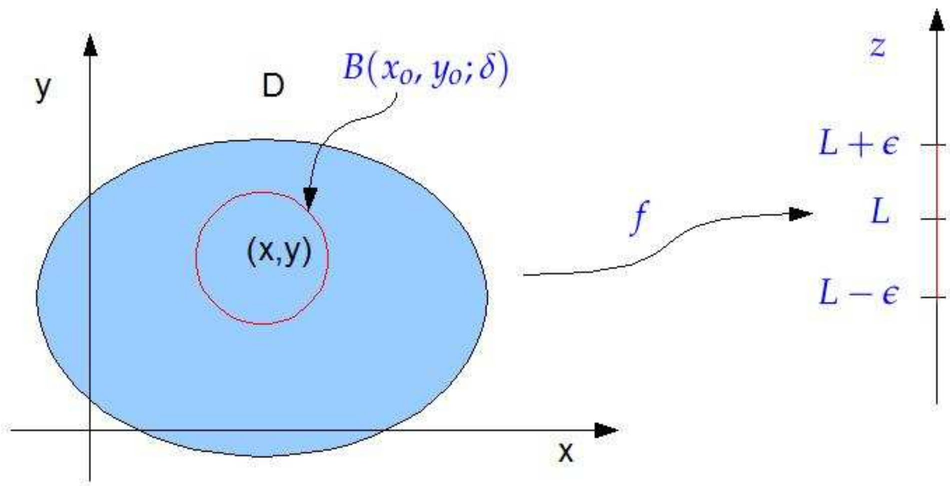

Figura 3.1: Os pontos de D que estão na bola $B(x_o, y_o; \delta)$ são levados no intervalo aberto $(L-\epsilon, L+\epsilon)$.

Exemplo 3.1. *A partir da definição de limite, calcule*

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y),$$

onde $f(x,y)$ é dada abaixo.

(a) $f(x,y) = c$, *onde c é uma constante*
(b) $f(x,y) = x$
(c) $f(x,y) = y$.

Solução.
(a) Seja $f(x,y) = c$, para todo (x,y), mostraremos que

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = c. \tag{3.1}$$

Seja (x_o, y_o) fixado. Dado $\epsilon > 0$, tome $\delta > 0$ qualquer, então se

$$0 < \sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2} < \delta,$$

temos

$$|f(x,y) - c| = 0 < \epsilon,$$

o que mostra (3.1).
(b) Seja $f(x,y) = x$, para todo (x,y), mostraremos que

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = x_o. \tag{3.2}$$

Seja (x_o, y_o) fixado. Dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \epsilon$, então se

$$0 < \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} < \delta,$$

temos

$$|f(x, y) - x_o| = |x - x_o| = \sqrt{(x - x_o)^2} < \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} < \delta = \epsilon,$$

o que mostra (3.2).

(c) Seja $f(x, y) = y$, para todo (x, y). De maneira análoga ao que foi feito no item (b), mostra-se que

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x, y) = y_o.$$

□

Teorema 3.1. (***Propriedades do limite***) *Sejam f e g definidas numa vizinhança deletada do ponto (x_o, y_o) e α uma constante. Se*

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x, y) = L \text{ e } \lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} g(x, y) = M,$$

então,

1. $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)}(\alpha f(x, y)) = \alpha L,$
2. $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)}(f(x, y) + g(x, y)) = L + M,$
3. $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x, y)g(x, y) = LM,$
4. $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = L/M$, *se* $M \neq 0$.
5. *Se $h(z)$ for uma função de uma variável que é contínua no ponto $z = L$, então,*

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} h(f(x, y)) = h(L).$$

Sugerimos que o leitor faça uma revisão de continuidade de funções de uma variável, mais precisamente, saber para que valores de x as funções de uma variável mais comuns são contínuas. Por exemplo, polinômios, e^x, as funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ são contínuas em toda a reta. A função $\ln x$ é contínua em $(0, \infty)$, a função $\sqrt{x}$ é contínua em $[0, \infty)$, desde que em $x = 0$ esteja subentendido continuidade à direita.

Dos itens 1 e 2 do Teorema 3.1, segue-se por indução que se $c_1, \ldots, c_n$ forem constantes e $f_1(x, y), \ldots, f_n(x, y)$ forem funções tais que o limite $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f_i(x, y)$ existam, então

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \; f_i(x, y) \right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \; \left(\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f_i(x, y) \right). \tag{3.3}$$

Além disso, do item 3 do Teorema 3.1, segue-se por indução que

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} (f_1(x,y)\ldots f_n(x,y)) = \left(\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f_1(x,y)\right)\ldots\left(\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f_n(x,y)\right) \quad (3.4)$$

Do Exercicio 3.1 itens (b) e (c) e de (3.4), temos

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} x^n = \left(\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} x\right)\ldots\left(\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} x\right) = x_o^n, \quad (3.5)$$

e

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} y^n = \left(\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} y\right)\ldots\left(\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} y\right) = y_o^n. \quad (3.6)$$

Note que do item 3 do Teorema 3.1, de (3.5) e de (3.6) concluimos que se m, n forem inteiros não negativos, então

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} x^n y^m = x_o^n\, y_o^m. \quad (3.7)$$

De 3.7 e de (3.3), concluimos que se $f(x,y)$ for um polinônio, então,

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = f(x_o,y_o). \quad (3.8)$$

Além disso, se $g(x,y)$ também for um polinônio e $g(x_o,y_o)\neq 0$, então, segue do item 4, do Teorema 3.1 que

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{f(x_o,y_o)}{g(x_o,y_o)}. \quad (3.9)$$

Exemplo 3.2. *Seja* $f(x,y) = x^2 - xy + y^3$, *calcule* $\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)$.

Solução. Como $f(x,y)$ é um polinônio, segue-se que de (3.8) que

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = f(1,2) = 1^2 - (1)(2) + 2^3 = 7.$$

□

Exemplo 3.3. *Calcule o limite* $\lim_{(x,y)\to(1,2)} h(x,y)$, *onde* $h(x,y) = \frac{x^2-xy+y^3}{x^2-y^2}$.

Solução. Como $h(x,y)$ é a razão de dois polinômios, onde o denominador x^2-y^2 não se anula no ponto $(1,2)$, da equação (3.9), temos

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} h(x,y) = h(1,2) = \frac{1^2-(1)(2)+2^3}{1^2-2^2} = -\frac{7}{3}.$$

Exemplo 3.4. *Calcule o limite* $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-y}{x^2-x+2xy-2y}$.

Solução. Note que tanto o numerador quanto o denominador de $\frac{xy-y}{x^2-x+2xy-2y}$ tendem a zero quando (x,y) tende a $(1,2)$, mas $\frac{xy-y}{x^2-x+2xy-2y} = \frac{y(x-1)}{(x+2y)(x-1)} = \frac{y}{x+2y}$, logo de (3.9), temos

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-y}{x^2-x+2xy-2y} = \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{y}{x+2y} = \frac{2}{1+(2)(2)} = 2/5$$

□

Exemplo 3.5. *Calcule* $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt{\frac{2x^2-xy+y^3}{x^2-y^2}}$.

Solução. Note que

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{2x^2-xy+y^3}{x^2-y^2} = \frac{2(1)^2-(1)(0)+(0)^3}{(1)^2-(0)^2} = 2.$$

Por outro lado, a função $\sqrt{z}$ é contínua em $z=2$, do item 5 do Teorema 3.1, temos

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt{\frac{2x^2-xy+y^3}{x^2-y^2}} = \sqrt{\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{2x^2-xy+y^3}{x^2-y^2}} = \sqrt{2}.$$

□

Exemplo 3.6. *Seja* $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x-y}$*, para todo* $(x,y) \neq (0,0)$*, então calcule* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Solução. Note que ambos o numerador e o denominador de $f(x,y)$ tendem a zero quando (x,y) tendem a $(0,0)$. Por outro lado, para $(x,y) \neq (0,0)$, temos

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x-y} = \frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)} = x+y.$$

Então de (3.8), concluimos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y) = 0+0 = 0.$$

□

Exercício 3.2. *Seja* $f(x,y)$ *definida numa vizinhança deletada do ponto* (x_o,y_o)*, mostre que*

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = 0,$$

se e somente se,

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} |f(x,y)| = 0.$$

Teorema 3.2. (*Teorema do Sanduiche*) *Sejam f, g e h funções definidas numa vizinhança deletada do ponto (x_o, y_o), na qual temos $g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y)$. Se*

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} g(x,y) = L = \lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} h(x,y),$$

então,

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = L.$$

Prova. Tome $\epsilon > 0$. Como $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} g(x,y) = L = \lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} h(x,y)$, então existe $\delta > 0$, tal que se (x,y) estiver na bola $B(x_o, y_o; \delta)$, devemos ter $g(x,y)$ e $h(x,y)$ no intervalo $(L-\epsilon, L+\epsilon)$. Como $g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(xy)$, teremos

$$L - \epsilon < g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y) < L + \epsilon.$$

Disso, concluimos que para todo $(x,y) \in B(x_o, y_o; \delta)$, temos $|f(x,y) - L| < \epsilon$, o que prova o teorema. □

Dizemos que uma função f é **limitada** num dado conjunto D, se existir uma constante positiva M, tal que $|g(x,y)| \leq M$, para todo (x,y) em D.

Exemplo 3.7. *Suponha que $f(x,y)$ e $g(x,y)$ sejam definidas numa vizinhança deletada de (x_o, y_o), na qual $g(x,y)$ seja limitada e que $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = 0$. Mostre que*

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)g(x,y) = 0. \tag{3.10}$$

Solução. Como $g(x,y)$ é limitada numa vizinhança deletada de (x_o, y_o), existe uma constante positiva, M tal que $|g(x,y)| \leq M$, para todo (x,y) em tal vizinhança, portanto na mesma temos

$$0 \leq |f(x,y)g(x,y)| = |f(x,y)|\,|g(x,y)| \leq M|f(x,y)|,$$

ou seja,

$$0 \leq |f(x,y)g(x,y)| \leq M|f(x,y)|. \tag{3.11}$$

Como $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = 0$, então do Exercício 3.2, $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} |f(x,y)| = 0$, logo, $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} M|f(x,y)| = M.0 = 0$. Como as funções 0 e $M|f(x,y)|$ tendem a zero quando (x,y) tende a $(0,0)$, das desigualdades (3.11) e do Teorema do Sanduiche, concluimos que $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} |f(x,y)g(x,y)| = 0$ e do Exercício 3.2, temos $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)g(x,y) = 0$. □

Exemplo 3.8. *Mostre que*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \text{ sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0.$$

Solução. Para todo $(x, y) \neq (0,0)$, temos $\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq 1$, logo temos a seguinte desigualdade: $\left|x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq |x|$, portanto,

$$0 \leq \left|x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| = |x| \ \left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq |x|,$$

ou seja,

$$0 \leq \left|x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq |x|.$$

Como as funções 0 e $|x|$ tendem a zero quando (x, y) tende a $(0,0)$, das desigualdades acima e do Teorema do Sanduiche, temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| = 0$$

e do Exercício 3.2, concluimos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0.$$

□

Exemplo 3.9. *Calcule o seguinte limite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} \ .$$

Solução. Note que $x^2 \leq x^2 + y^2$, logo $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$, portanto, elevando esta desigualdade a terceira potência, temos $0 \leq |x|^3 \leq (x^2+y^2)^{3/2}$. Dividindo estas desigualdades por $x^2 + y^2$, obtemos

$$0 \leq \frac{|x|^3}{x^2+y^2} \leq \sqrt{(x^2+y^2)}.$$

Se fizermos $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$, as desigualdades acima podem ser re-escritas como

$$0 \leq |f(x,y)| = \frac{|x|^3}{x^2+y^2} \leq \sqrt{(x^2+y^2)} \ .$$

Ou seja,

$$0 \leq |f(x,y)| \leq \sqrt{(x^2+y^2)} \ .$$

Como $|f(x, y)|$ está entre duas funções que tendem a zero quando (x, y) tende a $(0,0)$, segue-se do Teorema do Sanduiche que $|f(x, y)|$ tende a zero quando (x, y) tende a zero e, em virtude do Exercício 3.2, o mesmo acontecerá com $f(x, y)$. □

Observação 3.1. (***O teste dos dois caminhos***) *No plano existem infinitas maneiras de nos aproximarmos de um dado ponto* (x_o, y_o)*, a existência do limite*

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) \tag{3.12}$$

significa que ele não deve depender de como nos aproximamos do ponto (x_o, y_o)*. Em particular, se ao aproximarmos de* (x_o, y_o) *através de dois caminhos diferentes, a função* $f(x,y)$ *tender a valores diferentes, então o limite* (3.12) *não existirá.*

Exemplo 3.10. *Mostre que* $\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}$ *não existe.*

Solução. Seja

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0),$$

veja Figura 3.2.

Vejamos o que acontecerá com os valores de $f(x,y)$ quando nos aproximamos da origem através das retas $y = ax$, onde a é um número real fixo. Ao longo de tais retas, temos $f(x,y) = f(x,ax) = \frac{a}{1+a^2}$, logo,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{ao longo da reta } y=ax}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,ax) = \lim_{x\to 0} \frac{a}{1+a^2} = \frac{a}{1+a^2}.$$

Isto significa que ao aproximarmos de $(0,0)$ através das retas $y = ax$, $f(x,y)$ tenderá a valores diferentes, dependendo da escolha de a. Portanto, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe. $\square$

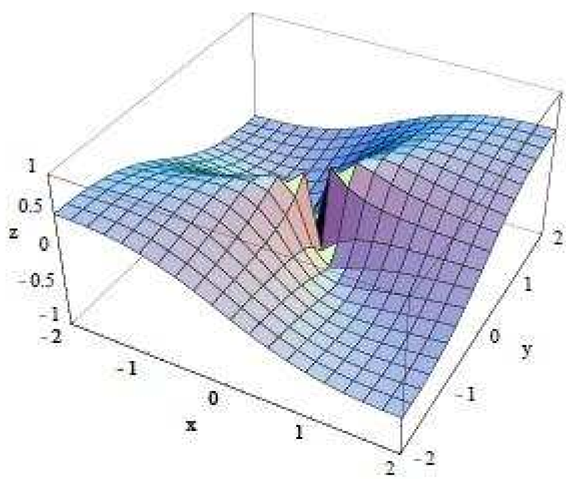

Figura 3.2: Gráfico $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$

Exemplo 3.11. *Mostre que* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ *não existe.*

Solução. Seja

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}, \quad (x,y) \neq (0,0),$$

então, ao longo da reta $y = 0$, $f(x,y) = f(x,0) = 0$, logo

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \text{ao longo da reta } y=0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Por outro lado, ao longo da parábola, $x = y^2$, temos $f(x,y) = f(y^2,y) = 1/2$, logo

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \text{ao longo da parábola } x=y^2}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(y^2,y) = \lim_{y\to 0} 1/2 = 1/2.$$

Portanto, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe. □

Observação 3.2. *Vale a pena ressaltar que o Teste dos Dois Caminhos é usado para provar* ***a não existência*** *do limite. O fato*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_o,y_o) \\ (x,y)\in C_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_o,y_o) \\ (x,y)\in C_2}} f(x,y),$$

onde C_1 *e* C_2 *são dois caminhos distintos passando por* (x_o,y_o)*, não quer dizer que o limite*

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)$$

exista.

Exercício 3.3. *Mostre que*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

não existe.

Observação 3.3. *No cálculo do limite* $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)$*, muitas vezes é conveniente fazermos mudança de coordenadas cartesianas para* ***coordenadas polares****:*

$$x = x_o + r\cos\theta \;\; e \;\; y = y_o + r\,sen\,\theta.$$

Como (x,y) *tende* (x_o,y_o) *se, e somente se, a distância de* (x,y) *a* (x_o,y_o) *tender a zero e esta vale* r*, então,*

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)$$

é equivalente a

$$\lim_{r\to 0^+} f(x_o + r\cos\theta, y_o + r \text{ sen } \theta),$$

o qual existirá se, e somente se, ele não depender de θ. A dependência em θ neste limite implicará que $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)$ não existe, por quê?

Exemplo 3.12. *Mostre que*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Solução. Seja

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Se introduzirmos as coordenadas polares $x = r\cos\theta$ e $y = rsen\,\theta$, teremos

$$0 \leq |f(x,y)| = |f(r\cos\theta, r\text{sen}\theta)| = \left|rsen\,\theta\cos\theta\right| \leq r,$$

pois as funções $\cos\theta$ e senθ são limitadas em módulos por 1. Como $|f(x,y)|$ está entre duas funções que tendem a zero quando r tende a zero, segue-se do Teorema do Sanduiche que $|f(x,y)|$ tende a zero quando r tende a zero e, em virtude do Exercício 3.2, o mesmo acontecerá com $f(x,y)$. □

Exercício 3.4. *Resolva o Exercício 3.9 usando coordenadas polares.*

Exercício 3.5. *Calcule os seguintes limites*

(a) $\lim_{(x,y)\to(2,1)}(3xy + xy^2 + 3x)$

(b) $\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\cos(3xy)}{\sqrt{x^2+2}}$.

Exercício 3.6. *Calcule o limite, se ele existir, ou mostre que ele não existe.*

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y}$

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-y^2}{x^2+3y^2}$

(d) $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5}$

(e) $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^2-4x+4}{xy-2y-x+2}$

(f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\text{sen}^2\, y}{2x^2+y^2}$

(g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{4x^4+y^4}$

(h) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-e^{-(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}$.

Exercício 3.7. *Use coordenadas polares para calcular os limites abaixo, caso eles existam.*

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$

(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\text{sen}(x^2+y^2)}$.

3.2 Continuidade

Definição 3.2. *Seja f definida numa vizinhança de (x_o, y_o). Dizemos que f é **contínua** em (x_o, y_o) se*
$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = f(x_o, y_o).$$

Dizemos que f é contínua num conjunto D, se ela for contínua em todos os pontos de D.

Teorema 3.3. (***Propriedades da continuidade***) *Suponha que f e g sejam contínuas no ponto (x_o, y_o) e c uma constante. Então,*

1. *as funções cf, $f+g$ e fg também serão contínuas em (x_o, y_o),*
2. *se $g(x_o, y_o) \neq 0$, então, f/g também será contínua em (x_o, y_o) e*
3. *se $h(z)$ for uma função de uma variável que é contínua em $z_o = h(x_o, y_o)$, então, a composta $h(f(x,y))$ também será contínua em (x_o, y_o).*

O Teorema acima segue diretamente das propriedades do limite.

Do Teorema 3.3 e das Equações (3.8) e (3.9), segue-se que polinônimos nas variáveis x, y são funções contínuas em todo o plano e que a razão destes é contínua naqueles pontos onde o denominador não se anula.

Exemplo 3.13. *Seja*
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Mostre que $f(x,y)$ é contínua em $(0,0)$.

Solução. Vimos no Exemplo 3.9 que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, logo, f é contínua em $(0,0)$. $\square$

Exemplo 3.14. *Seja*
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Mostre que $f(x,y)$ é contínua em todos os pontos.

Solução. A função $h(z) = \sqrt{z}$ é contínua para todo $z > 0$ e a função $g(x,y) = x^2 + y^2$ é contínua em todos os pontos, pois ela é um polinônio. Logo, do item 3 do Teorema 3.3, a composta $h(g(x,y)) = \sqrt{x^2+y^2}$, será contínua nos pontos (x,y) para os quais $g(x,y) = x^2 + y^2 > 0$; ou seja, $(x,y) \neq (0,0)$. Em tais pontos, temos $h(g(x,y)) > 0$. Portanto, do item 2 do Teorema 3.3, $f(x,y)$ será contínua nos mesmos, por ser a razão de duas funções contínuas, cujo denominador não se anula.

Resta-nos mostrar a continuidade de $f(x,y)$ em $(0,0)$. Vimos no Exemplo 3.12 que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, logo, f é contínua em $(0,0)$. □

Exemplo 3.15. *Mostre que*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{3.13}$$

é contínua em todos os pontos. Veja o gráfico de $f(x,y)$ na Figura 3.3.

Solução. Para $(x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y)$ é a razão de dois polinômios, sendo que o denominador, $x^2 + y^2$, não se anula em tais pontos, portanto, $f(x,y)$ é contínua nos mesmos.

Resta-nos mostrar que $f(x,y)$ é contínua em $(0,0)$. Como $\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$, segue-se que $\frac{x^2|y|}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2}|y| \leq |y|$. Portanto, para $(x,y) \neq (0,0)$, temos $|f(x,y)| = \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \leq |y|$. Logo,

$$0 \leq |f(x,y)| \leq |y|.$$

Das desigualdades acima, do Teorema do Sanduiche e do Exercício 3.2, segue-se que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$, portanto, $f(x,y)$ é contínua em $(0,0)$. □

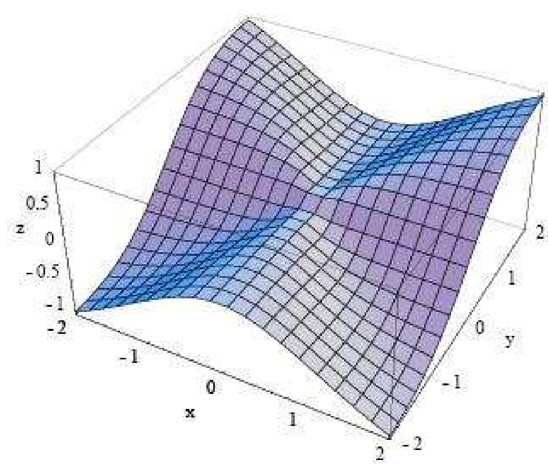

Figura 3.3: Gráfico de $f(x,y)$ dada em (3.13).

Vimos no Exemplo 3.11 que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ não existe, logo se $f(x,y)$ for uma função definida no plano todo, tal que $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ para $(x,y) \neq (0,0)$, ela não poderá ser contínua na origem, independentemente de como a definamos neste ponto, pois para que uma função seja contínua num ponto (x_o, y_o), o limite $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)$ deve existir, veja Definição 3.2.

Teorema 3.4. *Se $f(x,y)$ for contínua em (x_o, y_o), então $f(x,y)$ é limitada numa vizinhança deste ponto.*

Prova. Como f é contínua em (x_o, y_o), então $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = f(x_o, y_o)$. Tomando $\epsilon = 1$ na definição de limite, existe $\delta > 0$, tal que se $\sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2} < \delta$, então,

$$|f(x,y) - f(x_o, y_o)| < 1.$$

Portanto, se $(x,y) \in B(x_o, y_o; \delta)$, segue da desigualdade triangular e da desigualdade acima que

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &= |(f(x,y) - f(x_o,y_o)) + f(x_o,y_o)| \\ &\leq |(f(x,y) - f(x_o,y_o)| + |f(x_o,y_o)| \\ &< 1 + |f(x_o,y_o)|. \end{aligned}$$

□

Do Teorema 3.4, segue-se que se uma função se tornar ilimitada quando nos aproximamos de um dado ponto do seu domínio, então ela não pode ser contínua neste ponto. Por exemplo, se

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

então, ao longo do eixo x, temos $f(x,y) = f(x,0) = \frac{1}{x}$, a qual se torna ilimitada à medida em que nos aproximamos da origem. Portanto, $f(x,y)$ não pode ser contínua em $(0,0)$.

Exercício 3.8. *Seja*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{3.14}$$

Mostre que f é contínua em todos os pontos. Veja o gráfico de $f(x,y)$ na Figura 3.4.
(**Sugestão: Use coordenadas polares**)

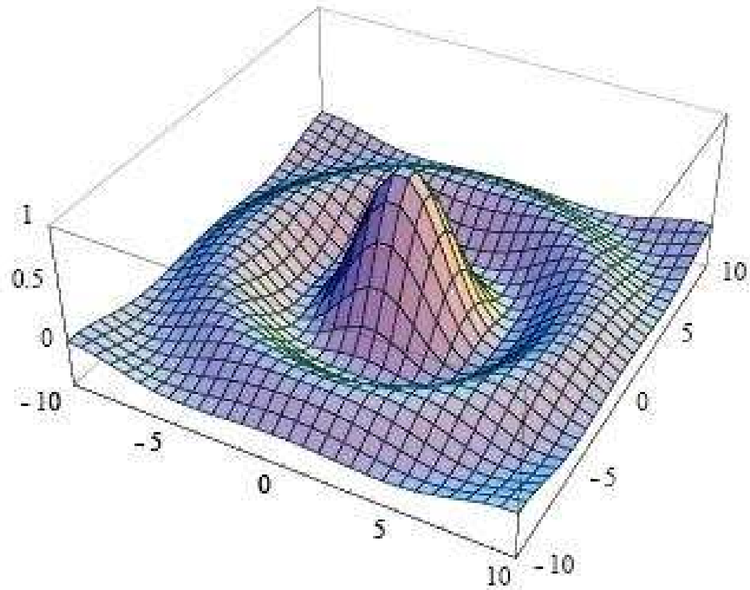

Figura 3.4: Gráfico de $f(x,y)$ dada em (3.14).

Exercício 3.9. *Descreva o conjunto de pontos (x,y) nos quais f é contínua.*

(a) $f(x,y) = \ln(x+y-1)$
(b) $f(x,y) = \frac{x^3-xy+y^2}{x^2-y^2}$
(c) $f(x,y) = \sqrt{x}\, e^{\sqrt{4-y^2}}$
(d) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$
(e) $f(x,y) = \frac{x+2y}{sen(x+y)-\cos(x-y)}$
(f) $f(x,y) = x\ sen\,(y/x)$
(g) $f(x,y) = \ln(\ln(x+y))$.

Exercício 3.10. *Use o item 3 do Teorema 3.3 para determinar onde $g(x,y) = h(f(x,y))$ é contínua, onde f e h são dadas abaixo.*

(a) $f(x,y) = x^3 - xy + y^2$ e $h(u) = (u^2-2)/u$
(b) $f(x,y) = x+y-1$ e $h(u) = \ln(u+2)$
(c) $f(x,y) = x + \text{tg}(y)$ e $h(u) = u^2+u$
(d) $f(x,y) = 2y\ln x$ e $h(u) = e^u$.

Exercício 3.11. *Discuta a continuidade da seguinte função*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-e^{-\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercício 3.12. *Mostre que se $f(x,y)$ for contínua em (x_o,y_o) e $f(x_o,y_o) > 0$, então existe $\delta > 0$, tal que $f(x,y) > 0$, para todo $(x,y) \in B(x_o,y_o;\delta)$.*

Capítulo 4

Derivadas parciais

O objetivo desta aula é introduzir o conceito de derivadas parciais para funções de duas variáveis. Ao terminar esta aula, o aluno deverá ser capaz de:

1. Saber o significado geométrico das derivadas parciais de uma função de duas variáveis.

2. Calcular derivadas parciais de qualquer ordem de uma função de duas variáveis.

4.1 Revisão do conceito de derivada para função de uma variável

No estudo de funções de uma variável, introduzimos o conceito de derivada, o qual é muito útil nas aplicações, por causa da sua interpretação como taxa de variação de uma função. Neste capítulo estenderemos a noção de derivada para funções de duas variáveis.

Antes de prosseguirmos a nossa discussão, voltemos ao caso em que f é uma função de uma variável. Seja $f : I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo aberto da reta. Seja x_o um ponto de I, então ao passarmos deste ponto para outro ponto $x \in I$, a variação de f é $\Delta f = f(x) - f(x_o)$. Dividindo esta variação pelo acréscimo $\Delta x = x - x_o$ da variável independente, obtemos o quociente de Newton

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_o)}{\Delta x}.$$

Se o limite do quociente acima, quando Δx tender a 0 existir, ele será chamado de derivada de f no ponto x_o e será denotado por $f'(x_o)$ ou $\frac{df}{dx}(x_o)$. Se fizermos $x = x_o + h$, podemos também escrever

$$f'(x_o) = \frac{df}{dx}(x_o) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}.$$

4.2 Definição de derivadas parciais e as suas propriedades

Voltemos agora ao caso em que f é uma função de duas variáveis.

Seja $f : D \to \mathbb{R}$, onde D é uma região aberta de $\mathbb{R}^2$ contendo ponto (x_o, y_o). A variação de f ao passarmos deste ponto para outro ponto $(x, y) \in D$ é dada por

$$\Delta f = f(x, y) - f(x_o, y_o),$$

por outro lado, a variação das variáveis independentes, a qual denotaremos por Δs, é a distância entre (x_o, y_o) e (x, y). O análogo ao quociente de Newton seria

$$\frac{\Delta f}{\Delta s} = \frac{f(x, y) - f(x_o, y_o)}{\Delta s}.$$

O passo seguinte seria tomarmos o limite deste quociente quando (x, y) tendesse a (x_o, y_o). Contudo, no plano existem infinitas maneiras do ponto variável (x, y) se aproximar de (x_o, y_o), por exemplo, poderíamos tomar uma curva no plano que passasse por (x_o, y_o) e nos aproximarmos deste ao longo desta curva. Por causa disso, ao tomarmos o limite do quociente de Newton acima quando (x, y) tende a (x_o, y_o), temos que dizer como fazemos tal aproximação, isto nos levará aos conceitos de derivadas parciais e de derivada direcional. Em ambos os casos faremos (x, y) tender a (x_o, y_o) ao longo de uma reta que passa por este ponto. Como veremos as derivada parciais serão casos particulares da derivada direcional quando nos aproximamos de (x_o, y_o) ao longo das retas $y = y_o$ e $x = x_o$.

Definição 4.1. *Seja f definida numa vizinhança do ponto (x_o, y_o), se o limite*

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x, y_o) - f(x_o, y_o)}{x - x_o}$$

existir, ele será chamado de ***derivada parcial de*** f ***em relação*** x *no ponto (x_o, y_o), o qual denotaremos por $f_x(x_o, y_o)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)$. De maneira análoga, se o limite*

$$\lim_{y \to y_o} \frac{f(x_o, y) - f(x_o, y_o)}{y - y_o}$$

existir, ele será chamado de ***derivada parcial de*** f ***em relação*** y *no ponto (x_o, y_o), o qual denotaremos por $f_y(x_o, y_o)$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)$.*

As derivadas parciais $f_x(x_o, y_o)$ e $f_y(x_o, y_o)$ representam as taxas de variações de $f(x, y)$ no ponto (x_o, y_o) em relação às direções horizontal e vertical, respectivamente.

Note que no cálculo de $f_x(x_o, y_o)$, aproximamo-nos do ponto (x_o, y_o) ao longo do reta $y = y_o$, ou seja a variável y não muda, seu valor é sempre igual a y_o. Portanto, ao longo desta reta, $f(x, y)$ é uma função apenas de x, a qual denotarmos esta por $g(x)$, ou seja, $g(x) = f(x, y_o)$. Então,

$$f_x(x_o, y_o) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x_o + h) - g(x_o)}{h} = g'(x_o).$$

De maneira análoga, no cálculo de $f_x(x_o, y_o)$, aproximamo-nos de (x_o, y_o) ao longo do reta $x = x_o$, ou seja a variável x não muda, seu valor é sempre igual a x_o. Portanto, ao longo desta reta, $f(x, y)$ é uma função apenas de y, a qual denotaremos por $w(y)$, ou seja, $w(y) = f(x_o, y)$. Então,

$$f_y(x_o, y_o) = \lim_{h \to 0} \frac{w(y_o + h) - w(y_o)}{h} = w'(y_o).$$

Resumindo, embora tenhamos introduzido um conceito novo, sob o ponto de vista operacional, não há nada novo. Mais precisamente, para calcularmos $f_x(x, y)$, na expressão de $f(x, y)$ olhamos para a y como se fosse uma constante e calculamos a derivada de uma função de uma variável apenas, ou seja, da variável x. De maneira análoga, o problema de calcular $f_y(x, y)$ reduz-se o cálculo da derivada de uma função apenas da variável y, ou seja, na expressão de $f(x, y)$ tratamos x como se fosse uma constante. Por isso, sugerimos que o leitor faça uma revisão de como calcular derivadas de funções de uma variável.

Da mesma forma que na derivação de uma função de uma variável, as derivadas parciais de $f(x, y)$ em relação a x e a y são **operações lineares**, ou seja se $f(x, y)$ e $g(x, y)$ forem duas funções cujas derivadas parciais em relação a x existem e c uma constante qualquer, então,

- $\frac{\partial}{\partial x}(c\, f(x, y)) = c\, \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ e
- $\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y) + g(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} g(x, y)$.

De maneira análoga, se $f(x, y)$ e $g(x, y)$ forem duas funções cujas derivadas parciais em relação a y existem e c uma constante qualquer, então,

- $\frac{\partial}{\partial y}(c\, f(x, y)) = c\, \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ e
- $\frac{\partial}{\partial y}(f(x, y) + g(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} g(x, y)$.

A **linearidade** das derivadas parciais, segue imediatamente das suas definições.

Exemplo 4.1. *Seja $f(x, y) = e^y \cos(xy)$, calcule $f_x(0, 0)$ e $f_y(1, 0)$.*

Solução. Tratando y como uma constante na expressão de $f(x,y)$ e a derivando em relação a x, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^y \cos(xy)\right) = e^y \left(\frac{\partial}{\partial x}\ \cos(xy)\right) = -ye^y \operatorname{sen}(xy).$$

De maneira análoga, tratando x como uma constante na expressão de $f(x,y)$ e a derivando em relação a y, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^y \cos(xy)\right)\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y} e^y\right)\cos(xy) + e^y \left(\frac{\partial}{\partial y}\cos(xy)\right)\\ &= \left(\cos(xy) - x\operatorname{sen}(xy)\right)e^y.\end{aligned}$$

Portanto, $f_x(x,y) = -ye^y \operatorname{sen}(xy)$ e $f_y(x,y) = (\cos(xy) - x\operatorname{sen}(xy))\,e^y$, em particular,

$$f_x(0,0) = 0 \ \ e \ \ f_y(1,0) = 1.$$

□

Exemplo 4.2. *Calcule* $f_x(1,\pi)$*, onde* $f(x,y) = x^2 + \cos x \cos y - \ln(xy)$*.*

Solução. Usando a linearidade da derivada parcial, temos

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial x}(\cos x \cos y) - \frac{\partial}{\partial x}\ln(xy) = 2x - \operatorname{sen} x \cos y - 1/x.$$

Portanto, $f_x(x,y) = 2x - \operatorname{sen} x \cos y - 1/x$, em particular,

$$f_x(1,\pi) = (2)(1) - \operatorname{sen}(\pi)\cos(1) - 1 = 1.$$

□

Para derivadas parciais também valem as regras usuais de derivação de funções de uma variável, ou seja, valem as regras para derivação de um produto e de um quociente de duas funções:

- $\frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)g(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\ g(x,y) + f(x,y)\ \frac{\partial}{\partial x} g(x,y)$
- $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\ g(x,y) - f(x,y)\ \frac{\partial}{\partial x} g(x,y)}{(g(x,y))^2}.$

Temos relações similares para a derivada parcial em relação a y.

Exemplo 4.3. *Calcule* $\left(\frac{xy^2 - x^3}{y\cos x + y^4}\right)_y$

Solução.

$$\begin{aligned}\left(\frac{xy^2-x^3}{y\cos x+y^4}\right)_y &= \frac{(xy^2-x^3)_y\ (y\cos x+y^4)-(xy^2-x^3)(y\cos x+y^4)_y}{(y\cos x+y^4)^2}\\ &= \frac{2xy(y\cos x+y^4)-(xy^2-x^3)(\cos x+4y^3)}{(y\cos x+y^4)^2}\end{aligned}$$

□

Exemplo 4.4. *Seja*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & se\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & se\ (x,y)\neq(0,0).\end{cases}.$$

Mostre a partir da definição de derivadas parciais que $f_x(0,0)=0=f_y(0,0)$.

Solução. Note que

$$f_x(0,0)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{0-0}{h}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}0=0$$

e

$$f_y(0,0)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{0-0}{h}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}0=0.$$

□

Exercício 4.1. *Calcule* f_x *e* f_y*, onde* $f(x,y)$ *é dada abaixo.*

(a) $f(x,y)=(x^3-y^2)^6$
(b) $f(x,y)=xe^y+y\,\mathrm{sen}x$
(c) $f(x,y)=(x^3-y^2)^6$
(d) $f(x,y)=xe^y+y\,\mathrm{sen}x$
(e) $f(x,y)=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}$
(f) $f(x,y)=\frac{x^2}{x+y}$
(g) $f(x,y)=x^5-3x^3y+2xy^2-3xy+4y$
(h) $f(x,y)=(x^3+y^3)(x-y)$
(i) $f(x,y)=(x^2+xy+y3)^3$
(j) $f(x,y)=\frac{1}{x}-\frac{2}{xy}$
(k) $f(x,y)=\mathrm{sen}(x+y)+\cos(x-y)$
(l) $f(x,y)=\mathrm{arcsen}\,(x/y)^2$
(m) $f(x,y)=\frac{e^2+e^{-x}}{e^y+e-y}$
(n) $f(x,y)=x^y+y^x$
(o) $f(x,y)=\int_x^{\cos x-2y^2}\cos t\ dt$
(p) $f(x,y)=\ln(x\ \mathrm{tg}y)$.

Exercício 4.2. *Seja* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & se\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & se\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Mostre, usando a definição de derivadas parciais, que $f_x(0,0)=0$ *e* $f_y(0,0)=0$.

4.3 A interpretação geométrica das derivadas parciais

O gráfico de $z = f(x,y)$ representa uma superfície no espaço, a qual denotaremos por S. Seja (a,b,c) um ponto de S, então $c = f(a,b)$.

Seja C_1 a curva interseção do plano $y = b$ com S. Ou seja, no plano $y = b$, temos a curva C_1, a qual é o gráfico de $z = f(x,b) \equiv g(x)$. Do estudo de funções de uma variável, sabemos que $g'(a)$ é o coeficiente da reta tangente a C_1 no ponto (a,b), mas

$$g'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} = f_x(a,b).$$

Assim, $f_x(a,b)$ é igual ao coeficiente angular da reta tangente à curva que é a interseção do gráfico de $f(x,y)$ com o plano $y = b$, no ponto $(a,b,f(a,b))$.

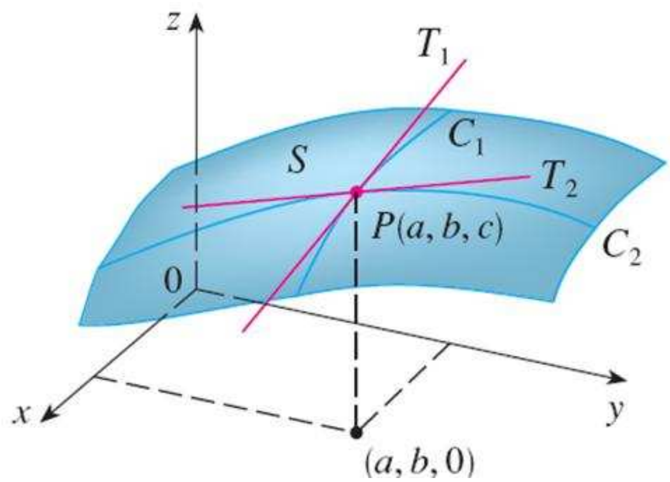

Figura 4.1: Interpretação geométrica das derivadas parciais $f_x(a,b)$ e $f_y(a,b)$.

De maneira análoga, seja C_2 curva interseção do plano $x = a$ com a superfície S. Ou seja, no plano $x = a$, temos a curva C_2, a qual é o gráfico de $z = f(a,y) \equiv w(y)$. Sabemos que $w'(b)$ é o coeficiente da reta tangente a C_2, no ponto (a,b), mas

$$w'(b) = \lim_{h\to 0} \frac{w(b+h)-w(b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h} = f_y(a,b).$$

Assim, $f_y(a,b)$ é igual ao coeficiente angular da reta tangente à curva que é a interseção do gráfico de $f(x,y)$ com o plano $x = a$, no ponto $(a,b,f(a,b))$.

Em resumo, podemos interpretar as derivadas parciais $f_x(a,b)$ e $f_y(a,b)$, como sendo os coeficientes angulares das retas T_1 e T_2 que são as tangentes às curvas obtidas pelas interseções de S com os planos $y = b$ e $x = a$, repectivamente, no ponto $(a, b, f(a, b))$.

Conforme será visto na Seção 5.3, as retas tangentes T_1 e T_2 determinam um plano que que chamaremos de **plano tangente a** S **no ponto** $(a, b, f(a, b))$.

Exercício 4.3. *Calcular a inclinação da tangente à curva segundo a qual o plano $y = 1$ corta a superfície $z = x^2 + y^2$, no ponto $(2, 1, 5)$.*

4.4 Derivadas parciais de ordens superiores

Como f_x e f_y também são funções das variáveis x e y, podemos derivá-las parcialmente em relação às variáveis x e y, casos estas derivadas existam. Em outras palavras, calculamos $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ e $(f_y)_y$, as quais denotaremos por f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} e f_{yy}, respectivamente. Com isso temos as derivadas parciais de segunda ordem de f. Podemos tomar derivadas parciais destas com relação a x e y, caso elas existam, e obter derivadas parciais de terceira ordem de f, ou seja, f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyx}, f_{xyy}, f_{yxx}, f_{yxy}, f_{yyx} e f_{yyy}. Repetindo o procedimento acima, podemos obter derivadas parciais de ordens superiores.

Também denotaremos f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} e f_{yy} por $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$, respectivamente. Temos notações similares para derivadas de ordens superiores, por exemplo, $f_{yxxyx} = \frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y \partial^2 x \partial y}$.

Exemplo 4.5. *Calcule f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} e f_{xxx}, onde $f(x, y) = xy^3 - x^4$.*

Solução. $f_x = y^3 - 4x^3$, $f_{xx} = -12x^2$, $f_{xy} = 3y^2$, $f_{xxx} = -24x$, $f_y = 3xy^2$, $f_{yx} = 3y^2$ e $f_{yy} = 6xy$. □

Exemplo 4.6. *Seja $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$. Calcule todas as derivadas parciais de primeira e segunda ordens de $f(x, y)$, bem como f_{xxy}.*

Solução.

$$\begin{aligned}
f_x &= y\cos(xy) \\
f_y &= -x\cos(xy) \\
f_{xx} &= -y^2 \operatorname{sen}(xy) \\
f_{xy} &= \cos(xy) - xy \operatorname{sen}(xy) \\
f_{yx} &= \cos(xy) - xy \operatorname{sen}(xy) \\
f_{yy} &= -x^2 \operatorname{sen}(xy) \\
f_{xxy} &= -xy^2\cos(xy).
\end{aligned}$$

□

Exercício 4.4. *Calcule todas as derivadas parciais de segunda ordem da função*

$$f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y + \ln(xy).$$

Note que nos Exemplos 4.5 e 4.6, temos $f_{xy} = f_{yx}$, ou seja, a ordem das derivadas parciais em relação a x e y não foi importante. Teria isto sido uma coincidência? A resposta a esta pergunta é dada no teorema abaixo, o qual será apenas enunciado.

Teorema 4.1. (***Teorema de Clairaut***) *Seja $f(x,y)$ definida numa bola aberta $B(x_o, y_o; r)$. Se as funções f_{xy} e f_{yx} forem ambas contínuas em $B(x_o, y_o; r)$, então,*

$$f_{xy}(x_o, y_o) = f_{yx}(x_o, y_o).$$

Exercício 4.5. *É possivel existir uma função f, tal que $f_x(x,y) = x + 3y$ e $f_y(x,y) = 5x - y$ e cujas derivadas de segunda ordem sejam contínuas?*

Exercício 4.6. *A hipótese de continuidade de f_{xy} e f_{yx} é essencial no Teorema de Clairaut. De fato, seja*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(*a*) *Calcule f_x e f_y em todos os pontos.*
(*b*) *Mostre que $f_{xy}(0,0) = -1$ e $f_{yx}(0,0) = 1$.*

Exercício 4.7. *Dizemos que uma função $f(x,y)$ é **harmônica** se*

$$f_{xx} + f_{yy} = 0$$

em todo o seu domínio. Mostre que as funções abaixo são harmônicas.

(*a*) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$.

(*b*) $f(x,y) = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$.

(*c*) $f(x,y) = \cos x \operatorname{senh} y + \operatorname{sen} x \cosh y$.

(*d*) $f(x,y) = e^{-x}\cos y + e^{-y}\cos x$.

Exercício 4.8. *Se $w = \cos(x-y) + \ln(x+y)$, mostre que*

$$w_{xx} - w_{yy} = 0.$$

Exercício 4.9. *Dizemos que $u(x,t)$, satisfaz a **equação da onda**, se*

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},$$

onde c é uma constante positiva. Mostre que as funções abaixo satisfazem a equação da onda.

(*a*) $u(x,t) = \operatorname{sen}(ckt)\ \operatorname{sen}(kx)$, *onde k é uma constante.*

(*b*) $u(x,t) = (x-ct)^4 + \cos(x+ct)$.

Capítulo 5

Diferenciabilidade de funções de duas variáveis

O objetivo desta aula é introduzir os conceitos de diferenciabilidade para funções de duas variáveis, de plano tangente a uma superfície que é o gráfico de uma função de duas variáveis e de diferencial de uma função de duas variáveis. Ao terminar esta aula, o aluno deverá ser capaz de:

1. Saber o que significa uma função de duas variáveis ser diferenciável e quais as implicações desta.

2. Saber calcular o plano tangente à uma superfície que é o gráfico de uma função de duas variáveis.

3. Saber como calcular a diferencial de uma função e como aproximar a variação de uma função pela sua diferencial.

5.1 Revisão do conceito de diferenciabilidade para função de uma variável

Antes de introduzirmos o conceito de diferenciabilidade para funções de duas variáveis, vamos rever quais as consequências de diferenciabilidade para uma função de uma variável. Dizemos que $y = f(x)$, definida num intervalo aberto contendo x_o é **diferenciável em** x_o, se o limite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

existir, neste caso o denotamos por $f'(x_o)$. Portanto, se f for diferenciável em x_o, temos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} - f'(x_o) \right) = 0.$$

Portanto, se denotarmos a quantidade

$$\frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} - f'(x_o)$$

por $\epsilon(\Delta)$, então $\epsilon(\Delta)$ tende a zero quando Δx tende a zero. Ou seja, f é diferenciável em x_o se, e somente se, pudermos escrever

$$f(x_o + \Delta x) = f(x_o) + f'(x_o)\Delta x + \epsilon\ \Delta x. \tag{5.1}$$

Exemplo 5.1. *Seja $f(x) = x^2 - x$, encontre a função $\epsilon(\Delta x)$ que aparece em* (5.1).

Solução.

$$\begin{aligned} f(x_o + \Delta x) &= (x_o + \Delta x)^2 - (x_o + \Delta x) \\ &= x_o^2 - x_o + (2x_o - 1)\Delta x + (\Delta x)(\Delta x) \\ &= f(x_o) + f'(x_o)\Delta x + \epsilon\ \Delta x, \end{aligned}$$

onde $\epsilon = \Delta x$. □

Uma consequência da diferenciabilidade de uma função de uma variável é a continuidade, ou seja, se $y = f(x)$ for derivável em x_o, então de (5.1), temos

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_o + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} (f(x_o) + f'(x_o)\Delta x + \epsilon \Delta x) = f(x_o),$$

o que mostra que f é contínua em x_o.

5.2 Diferenciabiliadade para função de duas variáveis

Conforme havíamos observado, a diferenciabilidade de uma função de uma variável implica em continuidade da mesma. Por outro lado, a existência das derivadas parciais $f_x(x_o, y_o)$ e $f_y(x_o, y_o)$ não implica em continuidade de $f(x, y)$ no ponto (x_o, y_o), como mostra o seguinte exemplo. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

Vimos no Exemplo 3.10 que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe, logo $f(x,y)$ não pode ser contínua em $(0,0)$. Por outro, no Exemplo 4.4, vimos que $f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$. Por isso, para funções de duas variáveis se quisermos definir a diferenciabilidade de modo que ela implique em continuidade, devemos exigir mais do que existência das suas derivadas parciais de primeira ordem.

Definição 5.1. (***Diferenciabilidade para função de duas variáveis***) *Seja $z = f(x,y)$, tal que suas derivadas parciais $f_x(x_o,y_o)$ e $f_y(x_o,y_o)$ existam. Dizemos que f é **diferenciável** em (x_o,y_o), se*

$$\begin{aligned} f(x_o+\Delta x, y_o+\Delta y) &= f(x_o,y_o)+f_x(x_o,y_o)\Delta x + f_y(x_o,y_o)\Delta y \\ &\quad +\epsilon_1\ \Delta x + \epsilon_2\ \Delta y, \end{aligned} \tag{5.2}$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 são funções de Δx e Δy, as quais tendem a zero quando Δx e Δy tendem a zero.

Da definição acima, se $f(x,y)$ for diferenciável em (x_o,y_o), então ela será contínua neste ponto. Portanto, se uma função não for contínua num ponto ela não pode ser diferenciável no mesmo.

Exemplo 5.2. *Encontre expressões para ϵ_1 e ϵ_2 dados em (5.2), onde $f(x,y) = 3x^2 - xy$.*

Solução. Note que

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x_o+\Delta x, y_o+\Delta y) - f(x_o,y_o) \\ &= (3(x_o+\Delta x)^2 - (x_o+\Delta x)(y_o+\Delta y)) - (3x_o^2 - x_o y_o) \\ &= (6x_o - y_o)\Delta x - x_o\Delta y + 3(\Delta x)^2 - \Delta x\Delta x, \end{aligned}$$

portanto, as funções ϵ_1 e ϵ_2 não são únicas, pois se escrevermos

$$\Delta z = (6x_o - y_o)\Delta x + (-x_o)\Delta y + (3\Delta x)\Delta x + (-\Delta x)\Delta y,$$

teremos $\epsilon_1 = 3\Delta x$ e $\epsilon_2 = -\Delta x$. Por outro lado, se escrevermos

$$\Delta z = (6x_o - y_o)\Delta x + (-x_o)\Delta y + (3\Delta x - \Delta y)\Delta x + (0)\Delta y,$$

teremos $\epsilon_1 = 3\Delta x - \Delta y$ e $\epsilon_2 = 0$. $\square$

A Definição 5.1 não parece ser muito prática e o leitor pode fazer a seguinte pergunta: existe algum critério simples para decidirmos seu uma função $f(x,y)$ é diferenciável num ponto (x_o,y_o)? A resposta a esta pergunta é data pelo seguinte teorema, que é uma consequência do Teorema do Valor Médio para função de uma variável.

Teorema 5.1. *Se f_x e f_y existirem numa vizinhança de (x_o,y_o) e forem contínuas neste ponto, então $f(x,y)$ será diferenciável em (x_o,y_o).*

Uma consequência do Teorema 5.1 é que se as derivadas f_x e f_y forem contínuas numa vizinhança de um ponto, então f tem que ser contínua na mesma, visto que diferenciabilidade implica em continuidade.

Exemplo 5.3. *Mostre que $f(x,y) = e^x\cos(xy)$ é diferenciável em $(0,0)$.*

Solução. Note que

$$f_x = e^x(\cos(xy) - y\,\mathrm{sen}(xy)) \text{ e } f_y = -xe^x\mathrm{sen}(xy),$$

as quais são contínuas para todo (x,y), portanto, pelo Teorema 5.1, $f(x,y)$ é diferenciável em todo o plano. $\square$

5.3 O plano tangente e a reta normal à superfície que é o gráfico de $z = f(x, y)$

Seja S a superfície correspondente ao gráfico de $z = f(x, y)$ e suponha que f_x e f_y sejam contínuas. Seja $P = (x_o, y_o, f(x_o, y_o))$, um ponto sobre esta superfície, C_1 e C_2 as curvas obtidas através das interseções de S com os planos $y = y_o$ e $x = x_o$, respectivamente. Sejam T_1 e T_2 as retas tangentes às curvas C_1 e C_2 no ponto $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$, veja Figura 4.1. Vimos na Seção 4.3 que os seus coeficientes angulares são $f_x(x_o, y_o)$ e $f_y(x_o, y_o)$, respectivamente. Portanto, no plano $y = y_o$, a reta T_1 é o gráfico de $z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - x_o)$. O que no espaço é o conjunto de pontos da forma

$$(x, y_o, f(x_o, y_o) + f_x(x_o, y_o)(x - x_o)),$$

onde $x \in \mathbb{R}$. Fazendo $x = x_o$ e $x = x_o + \Delta x$, encontramos dois pontos de T_1, digamos $P = (x_o, y_o, f(x_o, y_o))$ e $Q = (x_o + \Delta x, y_o, f(x_o, y_o) + f_x(x_o, y_o)\Delta x)$ de T_1. A reta T_1 é paralela ao vetor $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \Delta x\ (1, 0, f_x(x_o, y_o))$, portanto esta reta é paralela ao vetor

$$(1, 0, f_x(x_o, y_o)) \equiv \vec{V}_1.$$

De maneira análoga, os pontos sobre T_2 são da forma

$$(x_o, y, f(x_o, y_o) + f_x(x_o, y_o)(y - y_o)),$$

onde $y \in \mathbb{R}$. Fazendo $y = y_o$ e $y = y_o + \Delta y$, temos os pontos $M = (x_o, y_o, f(x_o, y_o))$ e $N = (x_o, y_o + \Delta y, f(x_o, y_o) + f_y(x_o, y_o)\Delta y)$ da reta T_2. A reta T_2 é paralela ao vetor $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \Delta y\ (0, 1, f_y(x_o, y_o))$, portanto ela é paralela ao vetor

$$(0, 1, f_y(x_o, y_o)) \equiv \vec{V}_2.$$

Definimos o **plano tangente** à S no ponto $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$, o qual denotaremos por π, como o plano que passa por $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$ e contém as retas T_1 e T_2. Como as retas T_1 e T_2 são paralelas aos vetores $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$, respectivamente, então o vetor

$$\vec{N} \equiv \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = (-f_x(x_o, y_o), -f_y(x_o, y_o), 1), \tag{5.3}$$

será perpendicular a T_1 e T_2 e, portanto, normal a plano π. O vetor $\vec{N}$ acima é chamado de **vetor normal** a S em $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$. Portanto, o plano π é o conjunto dos pontos (x, y, z) que satisfazem à equação (veja Seção 1.2),

$$(x - x_o, y - y_o, z - f(x_o, y_o)) \cdot \vec{N} = 0,$$

o que é equivalente a

$$z = f(x_o, y_o) + f_x(x_o, y_o)(x - x_o) + f_y(x_o, y_o)(y - y_o) \equiv l(x, y). \tag{5.4}$$

A **reta normal** à superfície S no ponto $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$ é a reta que passa por este ponto e é paralela ao vetor normal $\overrightarrow{N}$, dado pela equação (5.3); portanto,

$$x = x_o - f_x(x_o, y_o)t, \quad y = y_o - f_y(x_o, y_o)t \quad z = f(x_o, y_o) + t,$$

onde $t \in \mathbb{R}$, são equações paramétricas da mesma.

Exemplo 5.4. *Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao parabolóide elíptico*

$$z = 2x^2 + y^2,$$

no ponto $(1, 1, 3)$.

Solução. Note que $f_x(x, y) = 4x$ e $f_y(x, y) = 2y$, em particular, $f_x(1, 1, 3) = 4$ e $f_y(1, 1, 3) = 2$, logo a equação do plano tangente ao parabolóide no ponto $(1, 1, 3)$ é

$$4x + 2y - z = 3.$$

Por outro lado,

$$x = 1 - 4t, \quad y = 1 - 2t \quad z = 3 + t,$$

t real, são equações paramétrica da reta normal. □

Exercício 5.1. *Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície que é o gráfico de* $z = f(x, y)$ *no ponto* P *especificado.*

(a) $f(x, y) = 4x^3y^2 + 2y$ *e* $P(1, -2, 12)$
(b) $f(x, y) = 4x^2 - y^2$ *e* $P(5, -8, 36)$
(c) $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ *e* $P(-1, 0, 0)$
(d) $f(x, y) = \frac{2x+y}{x-2y}$ *e* $P(3, 1, 7)$
(e) $f(x, y) = xe^{-y}$ *e* $P(1, 0, 1)$.

Note que se $f(x, y)$ for diferenciável em (x_o, y_o), então de (5.2) e de (5.4), temos

$$f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) = l(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) + \epsilon_1 \, \Delta x + \epsilon_2 \, \Delta y, \tag{5.5}$$

portanto, os pontos do gráfico de $f(x, y)$ podem ser localmente aproximados pelos correspondentes pontos do plano tangente ao mesmo, no ponto $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$. O erro que cometemos ao fazermos tal aproximação é dado por $\epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$. A função

$$z = l(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) = f(x_o, y_o) + f_x(x_o, y_o)\Delta x + f_y(x_o, y_o)\Delta y$$

ou

$$z = l(x, y) = f(x_o, y_o) + f_x(x_o, y_o)(x - x_o) + f_y(x_o, y_o)(y - y_o)$$

é chamada de **aproximação linear de f em** (x_o, y_o).

Da discussão acima, concluimos que o plano tangente ao gráfico de uma função diferenciável de duas variáveis é o análogo da reta tangente ao gráfico de uma função diferenciável de uma variável: ambos nos permitem aproximar localmente a função por algo linear.

Exemplo 5.5. *Seja $f(x,y) = e^x \cos(xy)$, encontre a aproximação linear de f no ponto $(0,0)$.*

Solução. Vimos no Exemplo 5.3 que

$$f_x = e^x(\cos(xy) - y\,\mathrm{sen}(xy)) \quad e \quad f_y = -xe^x\mathrm{sen}(xy),$$

logo $f_x(0,0) = 1$ *e* $f_y(0,0) = 0$, portanto a aproximação linear de f em $(0,0)$ é

$$l(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y = 1 + x.$$

Ou seja, para (x,y) próximos de $(0,0)$, o valor de $f(x,y)$ é aproximadamente $1 + x$. □

5.4 Incrementos e diferenciais

A seguir denotaremos por dz (ou df) a variação f ao longo do plano tangente quando passamos de (x_o, y_o) para $(x_o + dx, y_o + dy)$, ou seja,

$$dz = l(x_o + dx, y_o + dy) - f(x_o, y_o),$$

então de (5.2) temos

$$dz = f_x(x_o, y_o)dx + f_y(x_o, y_o)dy,$$

que é chamada de **diferencial de f no ponto** (x_o, y_o). A diferencial de f no ponto (x,y) é dada por

$$dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy.$$

Exemplo 5.6. *Seja $z = f(x,y) = 5y^2 - xy + \cos(xy)$, calcule dz.*

Solução. Vimos que

$$dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy,$$

por outro lado, $f_x = -y - y\,\mathrm{sen}(xy)$ e $f_y(x,y) = 10y - x - x\,\mathrm{sen}(xy)$. Portanto,

$$dz = -y(1 + \,\mathrm{sen}(xy))dx + (10y - x - x\,\mathrm{sen}(xy))dy.$$

□

Exercício 5.2. *Calcule dz, onde $z = f(x,y)$ é dada abaixo.*

(a) $f(x,y) = x^3 - x^2y + 3y^2$
(b) $f(x,y) = 5x^2 + 4y - 3xy^3$
(c) $f(x,y) = x^2 \operatorname{sen} y + 2y^{3/2}$
(d) $f(x,y) = ye^{-2x} - 3x^4$
(e) $f(x,y) = x^2e^{xy} + 1/y^2$
(f) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2) + x \arctan y$

Note que em virtude de (5.2), se uma função $f(x,y)$ for diferenciável, então, a sua variação Δz, quando passamos de (x,y) para $(x + dx, y + dy)$ satisfaz

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x+dx, y+dy) - f(x,y) \\ &= f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy + \epsilon_1 dx + \epsilon_2 dy \\ &= dz + \epsilon_1 dx + \epsilon_2 dy, \end{aligned}$$

o que nos permite aproximarmos os encrementos Δz pela diferencial dz, pois esta é mais simples de ser calculada.

Exemplo 5.7. *Seja $z = f(x,y) = 3x^2 - xy$. Calcule Δz e dz quando (x,y) varia de $(1,2)$ para $(1,01; 1,98)$.*

Solução. No Exemplo 5.2 vimos que

$$\Delta z = (6x - y)\Delta x - x\Delta y + 3(\Delta x)^2 - \Delta x \Delta y.$$

Fazendo $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 0,01$ e $\Delta y = -0,02$, encontramos,

$$\Delta z = 0.0605.$$

Por outro lado, como $f_x = 6x - y$ e $f_y = -x$, segue-se que

$$dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = (6x - y)dx - xdy,$$

fazendo $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 0,01$ e $\Delta y = -0.02$, obtemos

$$dz = (6-2)(0.001) + (-1)(-0,002) = 0.060.$$

Logo, o erro que cometeríamos ao usar dz como aproximação de Δz seria de apenas $0,0005$. $\square$

Exemplo 5.8. *O raio e a altura de um cilindro reto são 8 cm e 20 cm, respectivamente, com erro possível de $\pm 0,01$ cm. Use diferenciais para aproximar o erro máximo no cálculo do volume do cilindro.*

Solução. O volume do cilindro circular reto é $V(r,h) = \pi r^2 h$, onde r e h são vistos como valores medidos, com erros máximos de medida dr e dh, respectivamente. Portanto,

$$\Delta V \approx dV = V_r dr + V_h dh = 2\pi rh dr + \pi r^2 dh.$$

Fazendo $r = 8$, $h = 20$ e $dr = dh = \pm 0,01$, obtemos o seguinte erro máximo:

$$dV = 2\pi(8)(20)(0,01) + (64)(0,01)\pi = 3,84\pi \approx 12,06 cm^3.$$

□

Exercício 5.3. *A resistência total de dois resistores R_1 e R_2 ligados em paralelo, é dada por*

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Se as medidas de R_1 e R_2, são 100 *e* 200 *ohms, respectivamente, com erro máximo de $\pm 1\%$ em cada medida, encontre uma aproximação do erro máximo no valor calculado de R.*

Capítulo 6

A Regra da Cadeia e a derivada direcional

O objetivo desta aula é introduzir a Regra da Cadeia para funções de duas variáveis e generalizar o conceito de derivadas parciais, introduzindo a derivada direcional. No final desta aula, o aluno deverá saber capaz de:

1. Aplicar a Regra da Cadeia e calcular derivadas de funções compostas.

2. Saber calcular o gradiente de uma função f, saber qual é o seu significado geométrico e como ele está relacionado com as curvas de níveis da função f.

3. Saber calcular a derivada direcional, bem como saber qual é o seu significado matemático.

6.1 A Regra da Cadeia

6.1.1 Revisão da Regra da Cadeia para funções de uma variável

Antes de vermos a Regra da Cadeia para o caso de funções de duas variáveis, vamos recordá-la para o caso de uma função de apenas uma variável. Sejam $y = f(x)$ e $x = g(t)$, funções diferenciáveis, então a composta de f com g é a função na variável t, dada por $y = f(g(t))$. Veremos como calcular a derivada desta função em relação a t.

Seja t fixado. Quando passamos de t para $t + \Delta t$, a variável x sofre uma variação de

$$\Delta x = g(t + \Delta t) - g(t),$$

enquanto que y varia de

$$\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t) = f(g(t + \Delta t)) - f(g(t)) = f(g(t) + \Delta x) - f(g(t)),$$

como f é diferenciável, da relação acima e de (5.1) temos

$$\Delta y = f'(g(t))\ \Delta x + \epsilon\ \Delta x, \tag{6.1}$$

onde ϵ tende a zero quando Δx tende a zero. Como $g(t)$ é contínua, pois é diferenciável, quando Δt tende a zero, Δx também tende a zero, portanto, ϵ tende a zero quando Δt tende a zero. Além disso, como g é diferenciável, então,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} = g'(t). \tag{6.2}$$

Dividindo a equação (6.1) por Δt, tomando o limite quando Δt tende a zero e usando (6.2), temos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(f'(g(t)) \frac{\Delta x}{\Delta t} + \epsilon \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) + f'(g(t))\, g'(t) + g'(t) \cdot 0 \\ &= f'(g(t))\, g'(t), \end{aligned} \tag{6.3}$$

que é chamada de **Regra da Cadeia**.

Em (6.3), $f'(g(t))$ é obtida tomando-se a derivada de $f(x)$ em relação a x, a qual é uma função de x, substituindo-se na mesma o x por $g(t)$. É comum reescrevermos a equação (6.3) da seguinte forma

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\, \frac{dx}{dt},$$

onde fica implícito que $\frac{dy}{dx}$ é obtida derivando-se f em relação a x e na expressão resultante, a qual é uma função de x, substituimos x por $g(t)$.

Exemplo 6.1. *Seja $y = e^x$, onde $x = t^2 + t$. Calcule $\frac{dy}{dt}$.*

Solução. Da Regra da Cadeia, temos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\, \frac{dx}{dt} = (e^x)(2t + 1) = e^{t^2+1}(2t + 1).$$

Portanto, temos $\frac{d}{dt}\, e^{t^2+t} = (2t + 1)e^{t^2+t}$. □

Nas aplicações em que temos que derivar uma função complicada de t, procuramos vê-la como uma composta de duas (ou mais) funções e usamos a Regra da Cadeia, para calcularmos a derivada da função composta.

6.1.2 A Regra da Cadeia para funções de duas variáveis

6.1.3 O caso em que $z = f(x,y)$, com $x = g(t)$ e $y = h(t)$

A seguir veremos como calcular a derivada em relação a t da composta $z = f(x,y)$, onde $x = g(t)$ e $y = h(t)$, assumindo que f, g e h sejam funções diferenciáveis.

Seja $z(t) = f(g(t), y(t))$ e fixemos o valor de t. Quando passamos de t para $t + \Delta t$, as variáveis x e y sofrem as seguintes variações:

$$\Delta x = g(t + \Delta t) - g(t)$$

e

$$\Delta y = h(t + \Delta t) - h(t),$$

respectivamente. Por outro lado, a variável z sofre uma variação de

$$\begin{aligned} \Delta z = z(t+\Delta t) - z(t) &= f(g(t+\Delta t), h(t+\Delta t)) - f(g(t), h(t)) \\ &= f(g(t) + \Delta x, h(t) + \Delta y) - f(g(t), h(t)). \end{aligned}$$

Como f é diferenciável, da relação acima e de (5.2), temos

$$\Delta z \;=\; f_x(g(t),h(t))\ \Delta x + f_y(g(t),h(t))\ \Delta y + \epsilon_1\ \Delta x + \epsilon_2\ \Delta y, \tag{6.4}$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 tendem a zero quando ambos Δx e Δy tendem a zero. Como g e h são diferenciáveis, elas são contínuas, portanto, Δx e Δy tendem a zero quando Δt tende a zero, portanto, ϵ_1 e ϵ_2 tendem a zero quando Δt tende a zero. Além disso, como g e h são diferenciáveis, então,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = g'(t) \quad e \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = h'(t). \tag{6.5}$$

Portanto, dividindo (6.4) por Δt, tomando o limite quanto Δt tende a zero, usando (6.5) e lembrando que ϵ_1 e ϵ_2 tendem a zero quando Δt tende a zero, temos

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(f_x(g(t),h(t)) \frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(g(t),h(t)) \frac{\Delta y}{\Delta t} + \epsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \epsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) \\ &= f_x(g(t),h(t))\ g'(t) + f_y(g(t),h(t))\ h'(t) + g'(t) \cdot 0 + h'(t) \cdot 0 \\ &= f_x(g(t),h(t))\ g'(t) + f_y(g(t),h(t))\ h'(t), \end{aligned}$$

onde $f_x(g(t),h(t))$ acima é obtida tomando-se a derivada parcial de $f(x,y)$ em relação a x, a qual é uma função das variáveis x e y e substituimos estas por $g(t)$ e $h(t)$, respectivamente. De maneira análoga, $f_y(g(t),h(t))$ é obtida tomando-se a derivada parcial de $f(x,y)$ em relação a y, a qual é uma função das variáveis x e y e substituimos estas por $g(t)$ e $h(t)$, respectivamente. Com isso provamos o teorema abaixo.

Teorema 6.1. *Seja $z = f(x,y)$, com $x = g(t)$ e $y = h(t)$, onde f, g e h são funções diferenciáveis. Então, temos*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

No teorema acima, $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ são obtidos derivando-se $f(x,y)$ parcialmente em relação a x e a y, respectivamente. Nas funções obtidas, substituimos x e y por $g(t)$ e $h(t)$, respectivamente.

Exemplo 6.2. *Seja $z = x^2 + xy$, com $x = 3t^2 + 1$ e $y = 2t - t^2$. Calcule $\frac{dz}{dt}$.*

Solução. Do Teorema 6.1, temos

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\
&= (2x+y)(6t) + (x)(2-2t) \\
&= \left(2(3t^2+1) + (2t-t^2)\right)(6t) + (3t^2+1)(2-2t) \\
&= (6t^2+2+2t-t^2)(6t) + (3t^2+1)(2-2t) \\
&= 2 + 10t + 18t^2 + 24t^3.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 6.3. *Seja f diferenciável numa vizinhança de (x_o, y_o), então para (x,y) fixo, defina*

$$w(t) = f(tx_o + (1-t)x, ty_o + (1-t)y),$$

onde $0 \leq t \leq 1$. Mostre que

$$\begin{aligned}
w'(t) &= (x_o - x)f_x(tx_o + (1-t)x, ty_o + (1-t)y) \\
&\quad + (y_o - y)f_y(tx_o + (1-t)x, ty_o + (1-t)y).
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Em particular,

$$w'(1) = \nabla f(x_o, y_o) \cdot (x - x_o, y - y_o), \tag{6.7}$$

onde o vetor

$$\nabla f(x,y) \equiv f_x(x,y)\vec{\imath} + f_y(x,y)\vec{\jmath} = (f_x(x,y), f_y(x,y)),$$

*é chamado de **gradiente** de f no ponto (x,y).*

Solução. Sejam $g(t) = tx_o + (1-t)x$ e $h(t) = ty_o + (1-t)y$, então podemos ver $w(t)$ como a seguinte composta: $w(t) = f(x,y)$, onde $x = g(t)$ e $y = h(t)$. Portanto da Regra da Cadeia, Teorema 6.1, temos, temos

$$w'(t) = f_x(tx_o + (1-t)x, ty_o + (1-t)y)(x - x_o) + f_y(tx_o + (1-t)x, ty_o + (1-t)y)(y_o - y),$$

com isso terminamos o exercício. □

Note que se $f(x,y)$ possuir derivadas de segunda ordem contínuas numa vizinhança de (x_o, y_o), podemos aplicar a Regra da Cadeia novamente às funções f_x e f_y e obteremos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} f_x(tx_o + (1-t)x, ty_o + (1-t)y) &= f_{xx}(tx_o + (1-t)x, ty_o(1-t)y)(x - x_o) + \\ &+ f_{yx}(tx_o + (1-t)x, ty_o + (1-t)y)(y_o - y)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} f_y(tx_o + (1-t)x, ty_o + (1-t)y) &= f_{yx}(tx_o + (1-t)x, ty_o(1-t)y)(x_o - x) + \\ &+ f_{yy}(tx_o + (1-t)x, ty_o + (1-t)y)(y_o - y),\end{aligned}$$

pois podemos ver $f_x(tx_o + (1-t)x, ty_o + (1-t)y)$ e $f_y(tx_o + (1-t)x, ty_o + (1-t)y)$ as compostas de $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ com as funções $x = g(t)$ e $y = h(t)$ definidas acima.

Das relações acima e de (6.6), temos

$$\begin{aligned}w''(t) &= (x_o - x)^2 f_{xx}(tx_o + (1-t)x, ty_o + (1-t)y) \\ &+ (x_o - x)(y_o - y) f_{xy}(tx_o + (1-t)x, ty_o + (1-t)y) \\ &+ (y_o - y)^2 f_{yy}(tx_o + (1-t)x, ty_o + (1-t)y).\end{aligned} \tag{6.8}$$

Exemplo 6.4. *Um circuito elétrico consiste de um resistor R e de uma força eletromotriz V. Num dado instante, $V = 80$ volts e aumenta a uma taxa de 5 volts/min, enquanto que $R = 40$ ohms e decresce a uma taxa de 2 ohms/min. Da Lei de Ohm, a corrente é dada por $I = V/R$. Calcule $\frac{dI}{dt}$.*

Solução. Neste caso, $I = V/R$, onde $I = I(t)$ e $R = R(t)$. Da Regra da Cadeia dada no Teorema 6.1, temos

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \frac{\partial I}{\partial V}\frac{dV}{dt} + \frac{\partial I}{\partial R}\frac{dR}{dt} \\ &= (1/R)\frac{dV}{dt} + (-V/R^2)\frac{dR}{dt} \\ &= (1/40)(5) + (-80/1600)(-2) = 9/40 = 0,225(amp/min).\end{aligned}$$

□

Exercício 6.1. *Calcule $\frac{dz}{dt}$, onde $z = f(x,y)$, com $x = g(t)$ e $y = h(t)$.*

(a) $z = x\ln(x + 2y)$, $x = \operatorname{sen} t$ *e* $y = \cos t$
(b) $z = x^2 - y^2$, $x = \frac{1}{t+1}$ *e* $y = \frac{t}{t+1}$
(c) $z = ye^{x+y}$, $x = t$ *e* $y = \cos t$
(d) $z = x^2y + xy^2$, $x = 1 - t^2$ *e* $y = 2 + t^2$
(e) $z = xy + x^2$, $x = e^t \cos t$ *e* $y = e^{-t}$.

Podemos calcular derivadas de ordem superior de $z = f(x,y)$, onde $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Por exemplo

$$\begin{aligned}\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right)\\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}.\end{aligned}$$

Aplicamos o Teorema 6.1 no cálculos das derivadas $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ e $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, isto é, olhamos para $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ como funções de x e y, onde estas são funções de t. Ou seja,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\frac{dy}{dt}$$

e

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}\frac{dy}{dt}.$$

6.1.4 O caso em que $z = f(u,v)$, onde $u = g(x,y)$ e $v = h(x,y)$

A seguir veremos com calcular as derivadas parciais com relação a x e y da função $z = f(u,v)$, com $u = g(x,y)$ e $v = h(x,y)$, onde assumiremos que f, g e h são funções diferenciáveis. Ou seja, calcularemos $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$, onde $z(x,y) = f(g(x,y),h(x,y))$.

Seja (x,y) fixado. Quando passamos de x para $x+\Delta x$ e mantemos y fixo, as variáveis u e v sofrem as seguintes variações:

$$\Delta u = g(x+\Delta x,y) - g(x,y)$$

e

$$\Delta v = h(x+\Delta x,y) - h(x,y).$$

Por outro lado, a variável z sofre a variação

$$\begin{aligned}z(x+\Delta x,y) - z(x,y) &= f(g(x+\Delta x,y),h(x+\Delta x,y)) - f(g(x,y),h(x,y))\\ &= f(g(x,y)+\Delta u, h(x,y)+\Delta v) - f(g(x,y),h(x,y)).\end{aligned}$$

Como f é diferenciável, da relação acima e de (5.2), temos

$$\begin{aligned}z(x+\Delta x,y) - z(x,y) &= f_u(g(x,y),h(x,y))\ \Delta u + f_v(g(x,y),h(x,y))\ \Delta v\\ &\quad +\epsilon_1\ \Delta u + \epsilon_2\ \Delta v\end{aligned} \tag{6.9}$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 são funções de Δu e Δv, as quais tendem a zero quando ambos Δu e Δv tendem a zero. Como g e h são contínuas, pois são diferenciáveis, segue-se que Δu e Δv tendem a zero quando Δx tende a zero. Portanto, ϵ_1 e ϵ_2 tendem a zero quando Δx tende a zero. Além disso, sendo g e h diferenciáveis, as suas derivadas parciais em relação à x existem. Logo,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x, y) - g(x,y)}{\Delta x} = g_x(x,y) \tag{6.10}$$

e

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x, y) - h(x,y)}{\Delta x} = h_x(x,y). \tag{6.11}$$

Portanto, dividindo a equação (6.9) por Δx, tomando-se o limite quando Δx tende a zero e usando (6.10) e (6.11), temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x+\Delta x, y) - z(x,y)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(f_u(g(x,y),h(x,y))\ \frac{\Delta u}{\Delta x} + f_v(g(x,y),h(x,y))\ \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\ \epsilon_1 + \frac{\Delta v}{\Delta x}\ \epsilon_2 \right) \\
&= f_u(u(x,y),v(x,y))\ g_x(x,y) + f_v(g(x,y),h(x,y))\ h_x(x,y) \\
&\quad + g_x(x,y) \cdot 0 + h_x(x,y) \cdot 0 \\
&= f_u(u(x,y),v(x,y))\ g_x(x,y) + f_v(g(x,y),h(x,y))\ h_x(x,y).
\end{aligned}$$

De maneira análoga, considerando a variação de z quando passamos de (x,y) para $(x, y+\Delta y)$ e tendo em vista que as funções como f, g e h são diferenciáveis, mostra-se que

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{z(x, y+\Delta y) - z(x,y)}{\Delta y} = f_u(u(x,y),v(x,y))\ g_y + f_v(g(x,y),h(x,y))\ h_y.$$

Com isso provamos o teorema abaixo.

Teorema 6.2. *Seja $z = f(u,v)$, com $u = g(x,y)$ e $v = h(x,y)$. Se f, g e h forem diferenciáveis, então*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

No teorema acima, fica implícito que $\frac{\partial z}{\partial u}$ é obtida tomando-se a derivada parcial de $f(u,v)$ em relação a u, a qual é uma função das variáveis u e v, na qual substituimos u e v pelas funções, $g(x,y)$ e $h(x,y)$, respectivamente. De maneira análoga, fica implícito que $\frac{\partial z}{\partial v}$ é obtida tomando-se a derivada parcial de $f(u,v)$ em relação a v, a qual é uma função das variáveis u e v, na qual substituimos u e v pelas funções, $g(x,y)$ e $h(x,y)$, respectivamente.

Exemplo 6.5. *Seja* $z = u + v^2 \cos u$, $u = x^2 + y^2$ *e* $v = x - y$. *Calcule* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Solução. Do Teorema 6.2, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \left(1 - v^2 \operatorname{sen} u\right)(2x) + (2v\cos u)(1) \\ &= 2x\left(1 - (x-y)^2 \operatorname{sen}(x^2+y^2)\right) + 2(x-y)\cos(x^2+y^2). \end{aligned}$$

De maneira análoga,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \left(1 - v^2 \operatorname{sen} u\right)(2y) + (2v\cos u)(-1) \\ &= 2y\left(1 - (x-y)^2 \operatorname{sen}(x^2+y^2)\right) - 2(x-y)\cos(x^2+y^2). \end{aligned}$$

□

Exercício 6.2. *Calcule* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial z}{\partial y}$, *onde* $z = f(u,v)$, *com* $u = g(x,y)$ *e* $v = h(x,y)$, *são dadas abaixo.*

(a) $z = u^2 + uv + v^2$, $u = x + y$ *e* $v = x - y$
(b) $z = u/v$, $u = xe^y$ *e* $v = 1 + xe^{-y}$
(c) $z = u\cos v$, $u = x + y$ *e* $v = xy$
(d) $z = uv + v^2$, $u = x\cos y$ *e* $v = y\cos x$.

Podemos calcular derivadas de ordens superiores de $z = f(u,v)$, onde $u = g(x,y)$ e $v = h(x,y)$. Por exemplo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Aplicamos o Teorema 6.2 no cálculos das derivadas $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$ e $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)$, isto é, olhamos para $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ como funções de u e v, onde estas são funções de x e de y. Ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial^2 u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

De maneira análoga, calculamos as derivadas $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$ e $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)$.

Exercício 6.3. *Seja $z = f(x, y)$, onde $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Mostre que*

$$z_{xx} + z_{yy} = z_{rr} + \frac{1}{r^2}\,z_{\theta\theta} + \frac{1}{r}\,z_r.$$

Teorema 6.3. *Seja $z = f(u)$, onde $u = g(x, y)$, com f e g diferenciáveis. Então,*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\,\frac{\partial u}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du}\,\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Note que o teorema acima pode ser visto como um caso particular do Teorema 6.2 quando $v = 0$.

Exercício 6.4. *Mostre que se $u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$, onde f e g têm derivadas de segunda ordem, então u satisfaz a* ***equação de onda***

$$u_{tt} = a^2\,u_{xx},$$

onde a é uma constante.

Exercício 6.5. *Se $z = \cos(x + y) + \cos(x - y)$, mostre que*

$$z_{xx} - z_{yy} = 0.$$

Exercício 6.6. *Dizemos que uma função f de duas variáveis é* ***homogênea*** *de grau n se $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$, para todo t, tal que (tx, ty) esteja no domínio de f. Por exemplo,*

$$f(x, y) = x^2 y + 2xy^2 + 5y^3$$

é homogênea de grau 3. Dado uma função $f(x, y)$ homogênea de ordem n, diferenciando $f(tx, ty)$ em relação a t e fazendo $t = 1$, mostre que

$$x f_x(x, y) + y f_y(x, y) = n f(x, y).$$

6.2 A derivada direcional

6.2.1 A definição da derivada direcional

Imagine que $z = f(x,y)$ represente a temperatura numa chapa de metal plana no ponto (x,y). Então as derivadas parciais $f_x(x_o,y_o)$ e $f_y(x_o,y_o)$ representam as taxas de variações da temperatura no ponto (x_o,y_o) em relação às direções horizontal e vertical, respectivamente. A seguir vamos definir a taxa de variação de $f(x,y)$ num ponto (x_o,y_o) na direção de um vetor unitário qualquer $\vec{n} = (n_1,n_2)$.

A reta l que passa por $P(x_o,y_o)$ e tem a direção de $\vec{n}$ é dada pelos pontos (x,y) da forma

$$(x,y) = (x_o,y_o) + t(n_1,n_2) = (x_o + n_1 t, y_o + n_2\, t),$$

onde o parâmetro t é real.

A variação de f quando passamos de $P(x_o,y_o)$ para $Q(x_o + n_1 t, y_o + n_2\, t)$ é

$$\Delta z = f(x_o + n_1 t\, y_o, n_2\, t) - f(x_o,y_o)$$

e como $\overrightarrow{n}$ tem norma 1, comprimento de $\overrightarrow{PQ}$ é

$$||\overrightarrow{PQ}|| = ||t\vec{n}|| = |t|\ ||\vec{n}|| = |t|.$$

Logo a taxa de variação média de $f(x,y)$ quando passamos de P a Q é

$$\frac{\Delta z}{t} = \frac{f(x_o + n_1 t\, y_o, n_2\, t) - f(x_o,y_o)}{t}.$$

Note que à medida em que variamos t, o ponto Q se move ao longo da reta l. Valores positivos de t significa que $\overrightarrow{PQ}$ tem a mesma direção e sentido de $\vec{n}$, enquanto que valores negativos de t significa que $\overrightarrow{PQ}$ tem a mesma direção, porém sentido oposto ao de $\overrightarrow{n}$.

A **derivada direcional de** $f(x,y)$ **no ponto** $P(x_o,y_o)$ **na direção de** $\vec{n}$ é dada pelo limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_o + n_1 t\, y_o, n_2\, t) - f(x_o,y_o)}{t},$$

caso ele exista, e neste caso é denotada por $D_{\vec{n}} f(x_o,y_o)$.

Seja

$$g(t) = f(x_o + n_1\, t, y_o + n_2\, t),$$

então,

$$D_{\vec{n}}f(x_o,y_o)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_o+n_1t\,y_o,n_2\,t)-f(x_o,y_o)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t}=g'(0). \quad (6.12)$$

Por outro lado, podemos ver $g(t)$ como a seguinte composta: $g(t)=f(x,y)$, com $x=u(t)=x_o+n_1\,t$ e $y=v(t)=y_o+n_2\,t$. Logo, se f for diferenciável, segue da Regra da Cadeia, Teorema 6.1, veja Exemplo 6.3, que

$$\begin{aligned} g'(t) &= f_x(u(t),v(t))\,\frac{dx}{dt}+f_y(u(t),v(t))\,\frac{dy}{dt} \\ &= f_x(u(t),v(t))\,n_1+f_y(u(t),v(t))\,n_2\,. \end{aligned}$$

Portanto,

$$g'(0)=f_x(x_o,y_o)\,n_1+f_y(x_o,y_o)\,n_2\equiv\nabla f(x_o,y_o)\cdot\vec{n}. \quad (6.13)$$

Finalmente, de (6.12) e (6.13), concluimos que

$$D_{\vec{n}}f(x,y)=\nabla f(x,y)\cdot\vec{n}.$$

Note que as derivadas parciais f_x e f_y são casos particulares de derivadas direcionais quando $\vec{n}=\vec{\imath}$ e $\vec{n}=\vec{\jmath}$, respectivamente.

Exemplo 6.6. *Determine a derivada direcional de $f(x,y)=x^2y^2-4x$, no ponto $(1,-1)$, na direção do vetor $\vec{v}=2\vec{\imath}+4\vec{\jmath}$.*

Solução. Note que $\vec{v}=\sqrt{20}$, logo, $\vec{v}$ não é unitário. O unitário na direção e sentido de $\vec{v}$ é

$$\vec{n}=\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}=\frac{1}{\sqrt{5}}\,\vec{\imath}+\frac{2}{\sqrt{5}}\,\vec{\jmath}.$$

Por outro lado,

$$\nabla f(x,y)=2xy^2\,\vec{\imath}+2x^2y\,\vec{\jmath}.$$

Logo,

$$D_{\vec{n}}(1,-1)=\nabla f(1,-1)\cdot\vec{n}=(2,-2)\cdot(1/\sqrt{5},2/\sqrt{5})=-\frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

□

Exercício 6.7. *Determine a taxa de variação de f em P na direção de $\vec{v}$.*

(i) $f(x,y)=1+2x\sqrt{y}$, $P(3,4)$ e $\vec{v}=(4,-3)$
(ii) $f(x,y)=x^2-5xy+3y^2$, $P(3,-1)$ e $\vec{v}=(1,1)$
(iii) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$, $P(2,1)$ e $\vec{v}=(-1,1)$
(iv) $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$, $P(2,-1,)$ e $\vec{v}=(4,3)$
(v) $f(x,y)=xe^{3xy}$, $P(4,0)$ e $\vec{v}=(-1,3)$
(vi) $f(x,y)=\text{arctg}\,(y/x)$, $P(4,-4)$ e $\vec{v}=(2,-3)$.

6.2.2 A interpretação geométrica do gradiente de uma função

Da definição de produto escalar, temos

$$\nabla f(x,y) \cdot \vec{n} = ||\nabla f(x,y)|| \; ||\vec{n}|| \cos\theta = ||\nabla f(x,y)|| \; \cos\theta,$$

onde θ é o ângulo entre $\nabla f(x,y)$ e $\vec{n}$. Como $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, temos o seguinte resultado.

Teorema 6.4. *Seja $f(x,y)$ uma função diferenciável. Então,*

(i) o valor máximo da derivada direcional $D_{\vec{n}} f(x,y)$ é $|\nabla f(x,y)|$ e ocorre quando $\vec{n}$ tem a mesma direção e sentido do vetor gradiente $\nabla f(x,y)$.

(ii) o valor mínimo da derivada direcional $D_{\vec{n}} f(x,y)$ é $-|\nabla f(x,y)|$ e ocorre quando $\vec{n}$ tem a mesma direção, porém sentido contrário ao do vetor gradiente $\nabla f(x,y)$.

Exemplo 6.7. *Seja $f(x,y) = x^3 e^{x-2y}$, $P(1,0)$ e $Q(0,1)$.*

(a) Encontre a derivada direcional de f no ponto $P(1,0)$, na direção de P para Q.

(b) Ache o vetor unitário na direção e sentido em que f cresce mais rapidamente no ponto P e determine a taxa de variação de f naquela direção.

(c) Ache o vetor unitário na direção e sentido em que f decresce mais rapidamente no ponto P e determine a taxa de variação de f naquela direção.

Solução.

(a) Note que

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\,\vec{\imath} + f_y(x,y)\,\vec{\jmath} = (3x^2 + x^3)e^{x-2y}\;\vec{\imath} - 2x^3 e^{x-2y}\;\vec{\jmath},$$

logo, $\nabla f(1,0) = (4e, -2e)$. O vetor $\overrightarrow{PQ} = (1,-1)$, o seu unitário é $\vec{n} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. Portanto,

$$D_{\vec{n}} f(1,0) = (4e, -2e) \cdot (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}\,e.$$

(b) A derivada direcional cresce mais na direção de sentido de $\nabla f(1,0)$, ou seja, quando

$$\vec{n} = \frac{\nabla f(1,0)}{||\nabla f(1,0)||} = (2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$$

e a taxa de variação de f nesta direção é $||\nabla f(1,0)|| = \sqrt{29}\,e$.

(c) A derivada direcional decresce mais na direção de sentido $-\nabla f(1,0)$, ou seja, quando

$$\vec{n} = -\frac{\nabla f(1,0)}{||\nabla f(1,0)||} = -(2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$$

e a taxa de variação de f nesta direção é $||\nabla f(1,0)|| = -\sqrt{29}\,e$. □

6.2.3 O gradiente e curvas de níveis

Seja $f(x,y)$ uma função diferenciável e C uma curva de nível de f. Se $P(x_o,y_o)$ for um ponto de C, então mostraremos que $\nabla f(x_o,y_o)$ será perpendicular a C no ponto $P(x_o,y_o)$, veja Figura 6.1. Para mostrarmos este resultado, introduziremos o conceito de parametrização de uma curva.

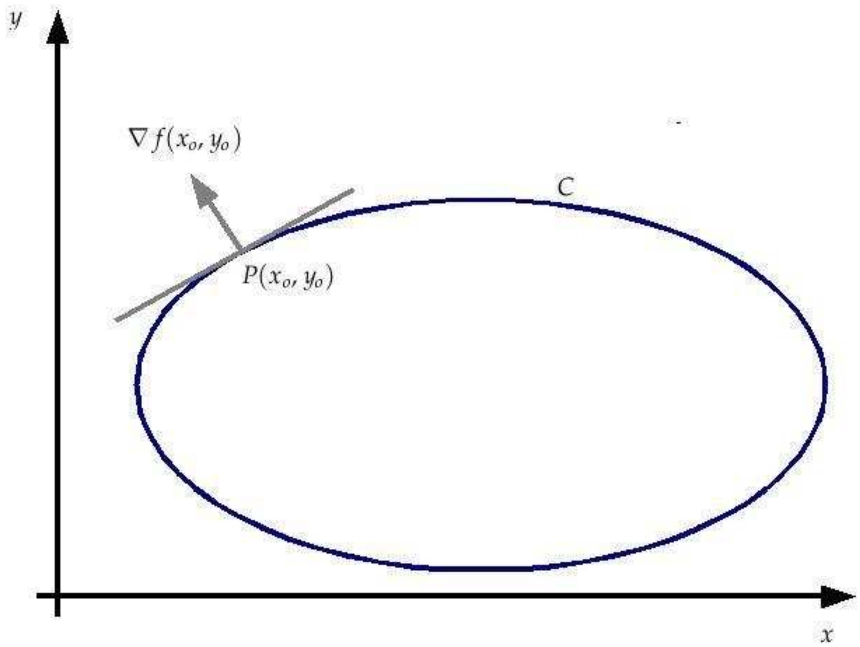

Figura 6.1: Seja C é curva de nível de $f(x,y)$ que ela passa pelo ponto $P(x_o,y_o)$, então $\nabla f(x_o,y_o)$ é perpendicular a C no ponto $P(x_o,y_o)$.

Definição 6.1. (*Equações paramétricas de uma curva*) *Dada uma curva C no plano, dizemos que as equações*

$$x = x(t) \quad e \quad y = y(t),$$

com $t \in I$, onde I é um intervalo da reta, são equações paramétricas de C (ou que elas nos dão uma parametrização para C) se, à medida em que t varia, a ponta do vetor

$$\overrightarrow{r}(t) = x(t)\ \vec{\imath} + y(t)\ \vec{\jmath}$$

descreve o conjunto de pontos de C, indo de uma extremidade a outra da curva.

Podemos ver C como uma trajetória descrita por uma partícula que se move no plano e $\overrightarrow{r}(t)$ o seu vetor posição, no instante t.

Alguns exemplos de parametrizações:

1. Dado um vetor $\overrightarrow{V} = (a, b) \neq (0, 0)$ e um ponto (x_o, y_o), as equações

$$x = x_o + at \quad e \quad y = y_o + bt,$$

$t \in \mathbb{R}$, representam uma parametrização da reta que passa por (x_o, y_o) e é paralela ao vetor $\overrightarrow{V}$.

2. Se C for o gráfico de uma função diferenciável, $y = f(x)$, onde $a \leq x \leq b$, então uma possível parametrização de C é a seguinte:

$$x = t \quad e \quad y = f(t),$$

onde $a \leq t \leq b$.

3. Seja C for o círculo de raio a, centrado na origem. Dado um ponto $P(x, y)$ de C, seja t é o ângulo entre o semi-eixo dos x positivos e o segmento de reta $\overline{OP}$, medido no sentido anti-horário. Então, da trigonometria, temos

$$x = a \cos t \quad e \quad y = a \text{ sen}\, t,$$

onde $0 \leq t \leq 2\pi$. Estas equações nos dão uma possível parametrização de C.

Dizemos que uma parametrização de C é **suave** se $x'(t)$ e $y'(t)$ forem contínuas e se o vetor (velocidade)

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{\imath} + y'(t)\vec{\jmath} \neq \vec{0},$$

para todo t em I. As três parametrizações dadas nos exemplos acima são todas suaves. A hipótese de $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, nos permite definir a tangente a C no ponto $P(x(t), y(t))$, ela é a reta que passa por este ponto e é paralela a vetor $\vec{r}'(t)$

Teorema 6.5. *Seja $f(x, y)$ diferenciável e C uma curva de nível de f. Seja $P(x_o, y_o)$ um ponto de C. Então $\nabla f(x_o, y_o)$ será perpendicular a C no ponto P.*

Prova. Seja $x = x(t)$ e $y = y(t)$, t num intervalo I, uma parametrização suave de C. Dizer que $\nabla f(x, y)$ é perpendicular a C no ponto $P(x(t), y(t))$ é equivalente a dizer que

$$\vec{r}'(t) \perp \nabla f(x(t), y(t)) \Leftrightarrow \vec{r}'(t) \cdot \nabla f(x(t), y(t)) = 0.$$

Note que sendo C uma curva de nível de $f(x, y)$, esta função é constante ao longo da mesma, portanto,

$$f(x(t), y(t)) = constante,$$

para todo t em I. Da relação acima e da regra da cadeia, veja Teorema 6.1, concluimos que

$$0 = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \nabla f(x(t), y(t)) \cdot \vec{r}'(t).$$

Com isso concluimos a prova do teorema. □

Uma consequência do teorema acima é a seguinte: seja $f(x,y)$ uma função diferenciável, então naqueles pontos (x_o, y_o) onde $\nabla f(x_o, y_o) \neq \vec{0}$, a direção da taxa de máxima de variação de $f(x,y)$ em (x_o, y_o) é ortogonal à curva de nível de $f(x,y)$ que passa por (x_o, y_o). De fato, se $\nabla f(x_o, y_o) \neq \vec{0}$, ele nos dá a direção da taxa de variação máxima de f no ponto (x_o, y_o), a qual pelo Teorema 6.5 é ortogonal a curva de nível de $f(x,y)$ que passa por (x_o, y_o), veja Figura 6.1.

Exercício 6.8. *Seja $f(x,y) = x^2 - y^2$ e C a curva $x^2 - y^2 = 1$. Verifique que para todo (x_o, y_o) em C, o vetor $\nabla f(x_o, y_o)$ é perpendicular a C, no ponto (x_o, y_o).*

Capítulo 7

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

O objetivo desta aula é de aplicar o conceito de derivadas parciais na resolução problemas de máximos e mínimos de funções de duas variáveis. Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de:

1. Saber os conceitos de máximos e mínimos locais e globais e de ponto crítico de uma função de duas variáveis.

2. Deverá saber como encontrar os pontos críticos de uma função de duas variáveis e classificá-los.

3. Deverá ser capaz de encontrar os valores máximo e mínimo de uma função contínua de duas variáveis, definida num conjunto compacto.

7.1 Algumas definições

A seguir veremos as noções de máximos e mínimos absolutos e locais para funções de dua variáveis.

Seja $f : D \to \mathbb{R}$, onde D é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e (x_o, y_o) um ponto de D. Dizemos que f tem um **máximo absoluto ou global** (simplesmente um **máximo**) no ponto (x_o, y_o) se, e somente se, $f(x, y) \leq f(x_o, y_o)$, para todo (x, y) e D. Geometricamente, no gráfico de f não pode ter ponto mais alto que o ponto $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$.

De maneira análoga, dizemos que f tem um **mínimo absoluto ou global** (ou simplesmente um **mínimo**) no ponto (x_o, y_o) se, e somente se, $f(x, y) \leq f(x_o, y_o)$, para todo (x, y) em D. Geometricamente, no gráfico de f não pode ter ponto mais baixo que o ponto $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$.

Exemplo 7.1. *Seja* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, definida por* $f(x,y) = x^2 + y^2$*. Então* $f(0,0) = 0$ *é o mínimo de* f *no seu domínio, pois dados dois números reais* x *e* y *quaisquer, temos*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0,0).$$

Por outro lado, f *não possui máximo no seu domínio, por quê?*

Exemplo 7.2. *Seja* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, definida por* $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$*. Então* $f(0,0) = 1$ *é o máximo de* f *no seu domínio, pois dados dois números reais* x *e* y *quaisquer, temos*

$$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2 \leq 1 = f(0,0).$$

Por outro lado, f *não possui mínimo no seu domínio, por quê?*

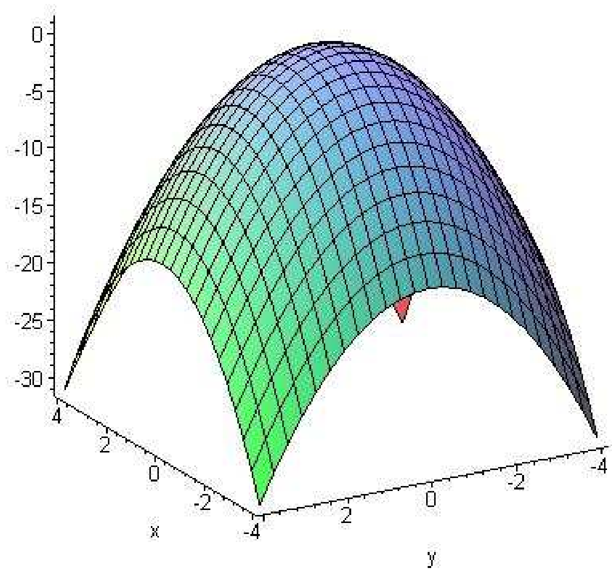

Figura 7.1: O gráfico de $z = 1 - x^2 - y^2$.

Em geral não é fácil encontrar o máximo nem o mínimo de uma função de duas variáveis como nos exemplos acima e, como salientamos, pode acontecer que a função não tenha máximo, ou mínimo, da mesma forma que acontece no caso de funções de apenas uma variável. O teorema abaixo nos dá condições suficientes para a existência de máximo e mínimo de uma função de duas variáveis.

Teorema 7.1. (***Teorema do Valor Extremo***) *Seja* D *um subconjunto compacto de* $\mathbb{R}^2$*. Se* f *for contínua em* D*, então* f *assume os seus valores máximo e mínimo em* D*. Ou seja, existem pontos* (x_1, y_1) *e* (x_2, y_2) *em* D*, tais que*

$$f(x_1, y_1) \leq f(x, y) \leq f(x_2, y_2),$$

para todo (x, y) *em* D*.*

Nos exemplos 7.1 e 7.2 ambas as funções são contínuas, porém os seus domínios não são compactos, por não serem limitados, portanto o teorema acima não se aplica.

Definição 7.1. *Dada uma função $f(x,y)$, seja (x_o,y_o) um ponto do seu domínio.*

- *Se existir algum $r > 0$, tal que $f(x,y) \geq f(x_o,y_o)$, para todo $(x,y) \in B(x_o,y_o;r)$, então dizemos que f has a* ***mínimo local*** *em (x_o,y_o).*
- *Se existir algum $r > 0$, tal que $f(x,y) \leq f(x_o,y_o)$, para todo $(x,y) \in B(x_o,y_o;r)$, então dizemos que f has a* ***máximo local*** *em (x_o,y_o).*

Valores máximos e mínimos locais de f são chamados de **extremos locais** de f.

É claro que máximos ou mínimos globais também são máximos ou mínimos locais.

No estudo de função de uma variável, vimos que se $g(x)$ fosse uma função definida numa vizinhança de x_o, g diferenciável neste ponto e se neste g tivesse um extremo local, então,

$$g'(x_o) = 0, \tag{7.1}$$

com isso estabelecemos condição necessária para que num dado ponto x_o, no qual g fosse diferenciável, tivéssemos um máximo ou um mínimo local.

Suponha que $f(x,y)$ esteja definida numa vizinhança de (x_o,y_o), no qual as suas derivadas parciais de primeira ordem existam e que neste f tenha um extremo local. Para fixar as idéias, suporemos que $f(x_o,y_o)$ seja um mínimo local. Então, como f tem um mínimo local em (x_o,y_o), para valores de (x,y) suficientemente próximos de (x_o,y_o) devemos ter

$$f(x,y) \geq f(x_o,y_o)$$

ou equivalentemente,

$$f(x,y) - f(x_o,y_o) \geq 0.$$

Em particular se tomarmos (x,y) da forma (x_o+h,y_o), onde h é suficentemente pequeno, teremos

$$g(x) \equiv f(x_o+h,y_o) - f(x_o,y_o) \geq 0. \tag{7.2}$$

Como assumimos que derivada $f_x(x_o,y_o)$ existe, a função $g(x)$ é diferenciável em x_o, pois $g'(x_o) = f_x(x_o,y_o)$. Além disso, de (7.2), $g(x)$ tem um mínimo local em x_o e de (7.1), devemos ter $g'(x_o) = 0$. Portanto,

$$f_x(x_o,y_o) = 0.$$

De maneira análoga, se f tem um mínimo local em (x_o,y_o), então para h suficientemente pequeno, teremos

$$w(y) \equiv f(x_o,y_o+h) - f(x_o,y_o) \geq 0. \tag{7.3}$$

Como assumimos que derivada $f_y(x_o, y_o)$ existe, a função $w(y)$ é diferenciável em y_o, pois $w'(y_o) = f_y(x_o, y_o)$. Além disso, de (7.3), $w(y)$ tem um mínimo local em y_o e de (7.1), devemos ter $w'(y_o) = 0$. Portanto,

$$f_y(x_o, y_o) = 0.$$

Se $f(x, y)$ tivéssemos assumido que $f(x, y)$ tinha um máximo local em (x_o, y_o), as funções $g(x)$ e $w(y)$ teriam máximos locais em x_o e y_o, respectivamente, e de (7.1), concluiríamos novamente que $f_x(x_o, y_o) = 0 = f_y(x_o, y_o)$. Com isso provamos o teorema abaixo.

Teorema 7.2. *Suponha que $f(x, y)$ esteja definida numa vizinhança de (x_o, y_o), na qual as derivadas parciais de primeira ordem existam e que neste f tenha um extremo local. Então,*

$$f_x(x_o, y_o) = 0 = f_y(x_o, y_o).$$

Definição 7.2. *Um ponto onde alguma das derivadas f_x ou f_y não existir, ou onde $f_x = f_y = 0$ é chamado de um **ponto crítico** de f.*

Observação 7.1. *Dada a função $f(x, y) = y^2 - x^2$, temos que $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$, contudo $f(0, 0) = 0$ não é nem máximo nem mínimo local de f. De fato, se nos aproximarmos de $(0, 0)$ ao longo do eixo x, temos $f(x, 0) = -x^2 < 0 = f(0, 0)$, se $x \neq 0$. Por outro lado, se nos aproximarmos de $(0, 0)$ ao longo do eixo y, teremos $f(0, y) = y^2 > 0 = f(0, 0)$, se $y \neq 0$. Portanto, em qualquer vizinhança de $(0, 0)$, f assume valores que são maiores e valores que são menores do que $f(0, 0)$. Um ponto crítico no qual não há nem máximo nem mínimo local é chamado **ponto de sela**.*

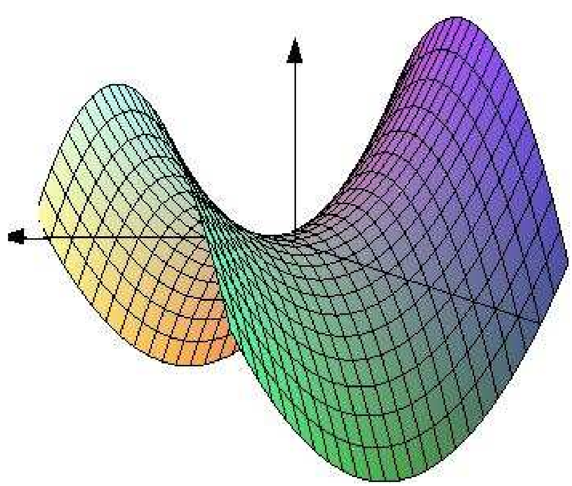

Figura 7.2: A origem é um ponto de sela de $z = y^2 - x^2$.

O Teorema 7.2 nos diz que máximos e mínimos de funções diferenciáveis ocorrem nos seus pontos críticos. Portanto, para descobrirmos os máximos e os mínimos de uma função diferenciável $f(x,y)$ numa região aberta D do plano, a primeira coisa a fazer é encontrar os pontos (x,y) nos quais ambas $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ se anulam. Se não houver pontos críticos em D, poderemos afirmar que f não tem nem mínimo nem máximo local em D. Se houver pontos críticos em D, deveremos examinar cada um deles, pois nem sempre um ponto crítico é ponto de mínimo ou de máximo, conforme já vimos. Por isso seria importante se tivéssemos um critério que nos permitisse caracterizar os pontos críticos de uma função diferenciável.

Teorema 7.3. (***Classificação dos pontos críticos***) *Suponha que f tenha todas as derivadas parciais até segunda ordem contínuas numa vizinhança de um ponto crítico (x_o, y_o). Seja*

$$\Delta(x_o,y_o) \equiv \det \begin{pmatrix} f_{xx}(x_o,y_o) & f_{xy}(x_o,y_o) \\ f_{xy}(x_o,y_o) & f_{yy}(x_o,y_o) \end{pmatrix} = f_{xx}(x_o,y_o)f_{yy}(x_o,y_o) - (f_{xy}(x_o,y_o))^2.$$

*(i) Se $\Delta(x_o,y_o) < 0$, então o ponto (x_o,y_o) será um **ponto de sela** de $f(x,y)$.*

(ii) Se $\Delta(x_o,y_o) > 0$, então $f(x_o,y_o)$ será um máximo local de $f(x,y)$, se $f_{xx}(x_o,y_o) < 0$ e um mínimo local de $f(x,y)$, se $f_{xx}(x_o,y_o) > 0$.

(iii) Se $\Delta(x_o,y_o) = 0$, a natureza de (x_o,y_o) não é determinada por este teste.

Por ser um pouco técnica, deixamos a demonstração deste teorema para o final deste capítulo, veja Seção 7.3.

Exemplo 7.3. *Encontre os extremos locais de*

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y$$

(*veja Figura* 7.3).

Solução. Como $f(x,y)$ é diferenciável em todos os pontos, os seus pontos críticos são os pontos (x,y), nos quais $f_x(x,y) = 0$ e $f_y(x,y) = 0$. Como $f_x = 2x + y - 2$ e $f_y = x + 2y - 2$, devemos ter

$$\begin{aligned} 2x + y &= 2 \\ x + 2y &= 2, \end{aligned}$$

cuja solução é $x = 2/3$ e $y = 2/3$. As derivadas parciais de segunda ordem são $f_{xx} = 2$, $f_{xy} = 1$ e $f_{yy} = 2$. Logo,

$$\Delta(x,y) = (2)(2) - (1)^2 = 3 > 0,$$

logo, temos um máximo ou mínimo local em $(2/3, 2/3)$. Como

$$f_{xx}(2/3, 2/3) = 2 > 0,$$

segue-se que o temos um mínimo local em $(2/3, 2/3)$. □

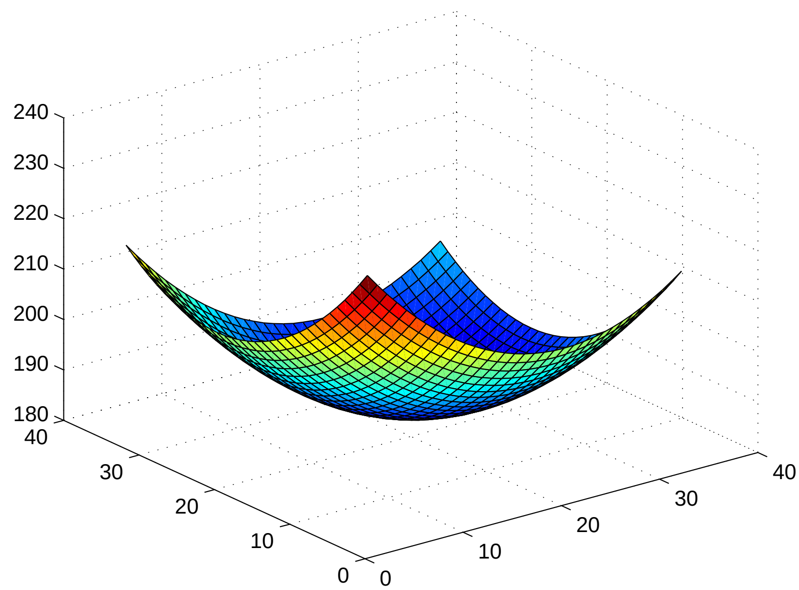

Figura 7.3: Gráfico de $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y$.

Exemplo 7.4. *Encontre e classifique os pontos críticos de*

$$f(x, y) = 4xy - 2x^2 - y^4$$

(*veja Figura* 7.4).

Solução. Como $f(x, y)$ é diferenciável em todos os pontos, os seus pontos críticos são os pontos (x, y), nos quais $f_x(x, y) = 0$ e $f_y(x, y) = 0$. Portanto, os pontos críticos de f são soluções do seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} 0 &= f_x(x, y) = 4y - 4x \\ 0 &= f_y(x, y) = 4x - 4y^3. \end{aligned}$$

Da primeira equação, temos $y = x$, substituindo esta relação na segunda equação acima, temos, $4x(1 - x^2) = 0$, portanto, temos $x = 0$, $x = 1$ e $x = -1$. Portanto, os pontos críticos são $(0, 0)$, $(1, 1)$, e $(-1, -1)$. Como $f_{xx}(x, y) = -4$, $f_{yy}(x, y) = -12y^2$ e $f_{xy} = 4$, temos

$$\Delta(x, y) = 48y^2 - 16.$$

Portanto, $\Delta(0, 0) = -16 < 0$, logo, $(0, 0)$ é um ponto de sela. Por outro lado, nos pontos $(1, 1)$ e $(-1, -1)$, temos $\Delta = 32 > 0$, portanto, cada um destes pontos é um extremo local. Como $f_{xx}(x, y) = -4 < 0$, ambos são máximos locais. $\square$

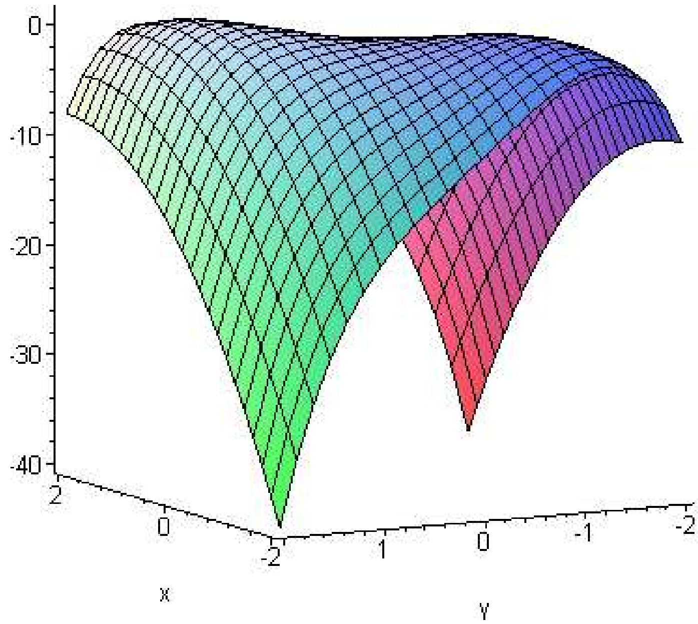

Figura 7.4: Gráfico de $4xy - 2x^2 - y^4$.

Exemplo 7.5. *Encontre e classifique os pontos críticos de*

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$$

(*veja Figura* 7.5).

Solução. Como $f(x,y)$ é diferenciável em todos os pontos, os seus pontos críticos são os (x,y) nos quais $f_x(x,y) = 0$ e $f_y(x,y) = 0$, ou seja, são soluções do seguinte sistema

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 \\ y^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $(1,-1)$, $(1,1)$, $(-1,1)$ e $(-1,-1)$. Note que $f_{xy}(x,y) = 0$, $f_{xx}(x,y) = 6x$ e $f_{xx}(x,y) = 6y$, portanto,

$$\Delta(x,y) = 36xy.$$

Então

$$\Delta(1,-1) = \Delta(-1,1) = -36 < 0$$

e concluimos que os pontos $(-1,1)$ e $(-1,-1)$ são pontos de sela. Note que

$$\Delta(1,1) = \Delta(-1,-1) = 36 > 0,$$

como $f_{xx}(1,1) = 6 > 0$, temos um ponto de mínimo local em $(1,1)$, por outro lado, $f_{xx}(-1,-1) = -6 < 0$, logo em $(-1,-1)$ temos um máximo local. $\square$

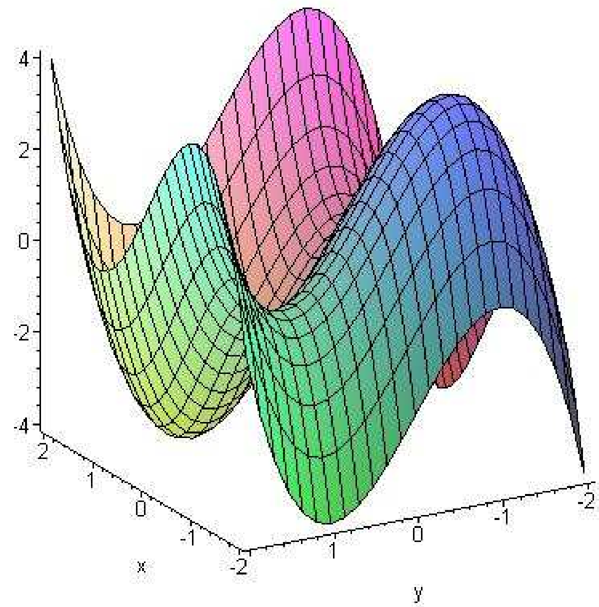

Figura 7.5: Gráfico de $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$.

Exercício 7.1. *Determinar os máximos e os mínimos locais da função*

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{x} - \frac{64}{y},$$

na região $D = \{(x,y) \ : \ x < 0 \text{ e } y > 0\}$.

Exercício 7.2. *Mostre que*

$$g(x,y) = \operatorname{sen}(xy) + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$$

(*veja Figura* 7.6), *admite máximo local em* $(\pi/3, \pi/3)$ *e mínimo local em* $(5\pi/3, 5\pi/3)$.

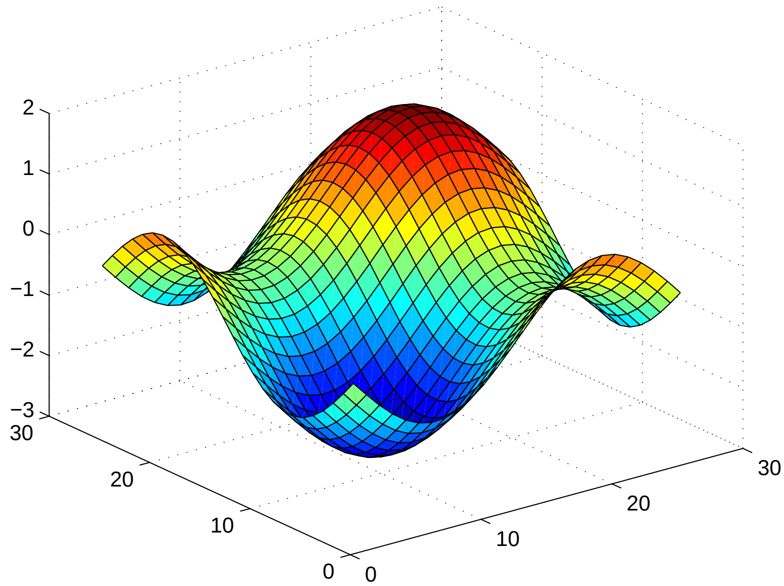

Figura 7.6: Gráfico de $g(x, y) = \text{sen}(xy) + \text{sen}\, x + \text{sen}\, y$.

Exemplo 7.6. *Mostre que o valor máximo e o valor mínimo de $f(x, y) = x^2 - y^2$ no disco D, dado por $x^2 + y^2 \leq 1$, ocorrem na fronteira deste. Calcular estes extremos globais.*

Solução. Como $f(x, y)$ é diferenciável para todo (x, y) dentro do disco, segue-se que os seus pontos críticos dentro do disco, caso existam, são as soluções de $\nabla f(x, y) = \vec{0}$. Por outro lado, $\nabla f(x, y) = (x, y)$. Portanto $(0, 0)$ é o único ponto crítico de f dentro do disco. Vimos na Observação 7.1 que $(0, 0)$ é um ponto de sela. Como $f(x, y)$ é contínua e o seu domínio D é compacto, pelo Teorema 7.1, ela deve assumir os seus valores máximos e mínimos em D. Como eles não podem estar dentro do disco, pois o único ponto crítico lá é $(0, 0)$, o qual é um ponto de sela, o máximo e o mínimo devem ocorrer na fronteira de D, ou seja, no círculo $x^2 + y^2 = 1$.

No círculo temos $y^2 = 1 - x^2$, substituindo esta relação na expressão para $f(x, y)$, temos

$$f(x, y) = f(x, 1 - x^2) = 2x^2 - 1 \equiv g(x),$$

onde $-1 \leq x \leq 1$. Com isso os valores máximo e mínimo de f em D são os valores máximo e mínimo de $g(x)$, em $-1 \leq x \leq 1$. Uma conta simples nos leva aos valores -1 e 1 como o mínimo e máximo de g, respectivamente. Portanto, os valores mínimo e máximo de f no disco D são -1 e 1, respectivamente. $\square$

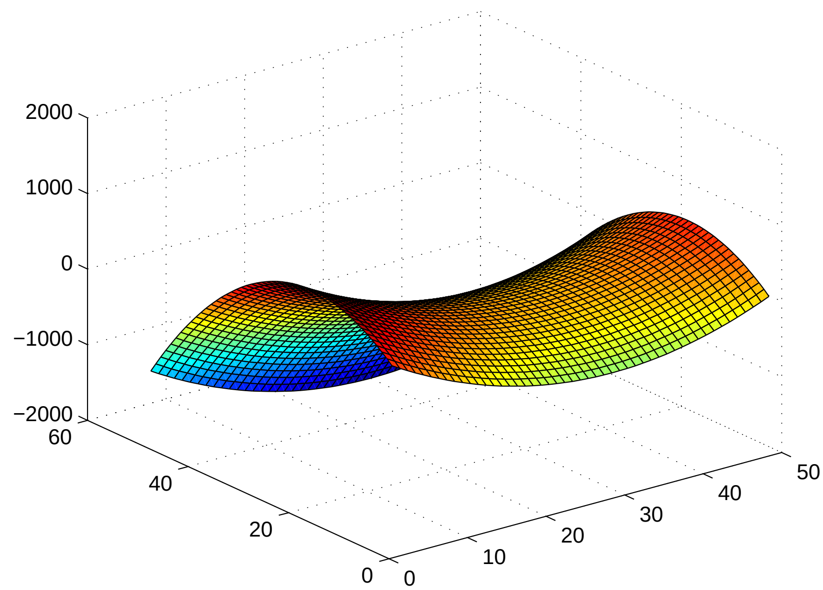

Figura 7.7: Gráfico de $f(x, y) = 18x^2 - 32y^2 - 36x - 128y + 15$.

Exemplo 7.7. *Mostre que*

$$f(x, y) = 18x^2 - 32y^2 - 36x - 128y + 15,$$

(veja Figura 7.7*), tem um único ponto crítico no* $\mathbb{R}^2$*, o qual é um ponto de sela.*

Exemplo 7.8. *Encontre e classifique os pontos críticos de*

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

(veja Figura 7.8*).*

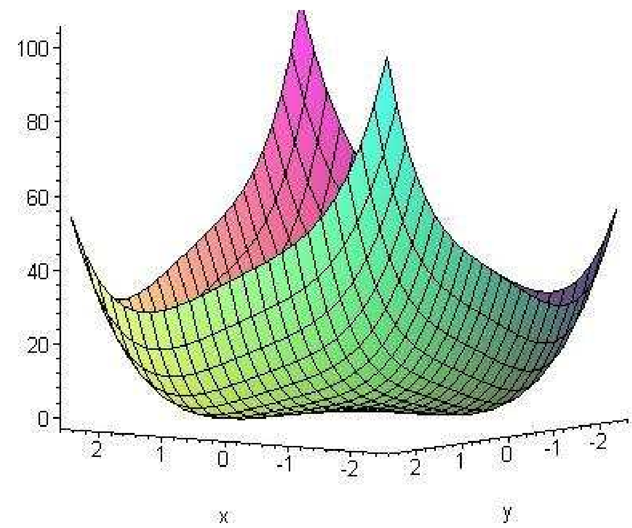

Figura 7.8: Gráfico de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

Exercício 7.3. *Discuta a natureza dos pontos críticos de cada uma das funções abaixo.*

(a) $f(x, y) = x^2 - y^2$
(b) $f(x, y) = 3xy - x^2 - y^2$
$(c$ $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$
(d) $f(x, y) = 4x^2 - 12xy + 9y^2$
(e) $f(x, y) = x^4 + y^4$
(f) $f(x, y) = x^4 - y^4$
(h) $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$
(i) $f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$
(j) $f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2}$
(k) $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$
(l) $f(x, y) = e^x \cos y$
(m) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

7.2 Aplicações

A partir do Teorema 7.1, temos um procedimento para encontrar os valores máximos e mínimos de uma função contínua, definida num conjunto limitado e fechado D:

- Calculamos f nos pontos críticos (pontos interiores de D onde $f_x = f_y = 0$ ou alguma das derivadas f_x ou f_y não exista).
- Calculamos os valores de f na fronteira de D.
- O maior e o menor dos valores de f obtidos nos itens acima nos darão os valores máximo e mínimo de f em D.

Exemplo 7.9. *Seja*

$$f(x,y) = 4xy - 2x^2 - y^4,$$

definida no quadrado $D = \{(x,y) : |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$ *(veja Figura* 7.4*). Encontre os valores máximos e mínimos de* f *em* D.

Solução. Como f é um polinômio, ela é diferenciável em todos os pontos interiores de D, portanto, os pontos críticos de f são os pontos no interior de D, nos quais $\nabla f(x,y) = (0,0)$, ou seja, são soluções do seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} 0 &= f_x(x,y) = 4y - 4x \\ 0 &= f_y(x,y) = 4x - 4y^3. \end{aligned}$$

Portanto, os pontos críticos de f são $(0,0)$, $(1,1)$, e $(-1,-1)$, nos quais f vale 0, 1 e 1, respectivamente.

Os valores máximo e mínimo de f têm que ser atingidos em algum destes pontos ou em pontos da fronteira de D.

A seguir estudaremos os valores de f na fronteira de D, a qual é formada de quatro segmentos de reta.

No segmento $x = 2$ e $-2 \leq y \leq 2$, temos $f(x,y) = -8 + 8y - y^4 \equiv g(y)$. Como a função $g(y)$ é contínua no intervalo fechado e limitado $[-2,2]$, ela assume os valores máximo e mínimo no mesmo. Seus pontos críticos são os pontos do interior deste intervalo nos quais $g'(y) = 8 - 4y^3 = 0$, ou seja, $y = 2^{1/3}$ e $g(2^{1/3}) = -8 - 10\,2^{1/3}$. Além disso, nas extremidades do intervalo, temos $g(2) = -8$ e $g(-2) = -40$.

No segmento $x = -2$ e $-2 \leq y \leq 2$, temos $f(x,y) = -8 - 8y - y^4 \equiv h(y)$. Como a função $h(y)$ é contínua no intervalo fechado e limitado $[-2,2]$, ela assume os valores máximo e mínimo no mesmo. Seus pontos críticos são dados por $h'(y) = -8 - 4y^3 = 0$, ou seja, $y = -2^{1/3}$ e $h(-2^{1/3}) = -8 - 6\,2^{1/3}$. Além disso, $h(2) = -40$ e $h(-2) = -8$.

No segmento $y = 2$, $-2 \leq x \leq 2$, temos $f(x,y) = -16 + 8x - 2x^2 \equiv q(x)$. Como a função $q(x)$ é contínua no intervalo fechado e limitado $[-2,2]$, ela assume os valores máximo e mínimo no mesmo. Seus pontos críticos são dados por $q'(x) = 8 - 4x = 0$, ou seja, $x = 2$. Logo q não tem pontos críticos no interior do seu domínio, portanto, os máximos e mínimos estão nas extremidades do intervalo, ou seja, nos pontos 2 e -2. Note que $q(2) = 0$ e $q(-2) = -32$, que são os seus valores máximo e mínimo, respectivamente.

No segmento $y = -2$, $-2 \leq x \leq 2$, temos $f(x, y) = -16 - 8x - 2x^2 \equiv w(x)$. Como a função $w(x)$ é contínua no intervalo fechado e limitado $[-2, 2]$, ela assume os valores máximo e mínimo no mesmo. Seus pontos críticos são dados por $w'(x) = -8 - 4x = 0$, ou seja, $x = -2$. Logo w não tem pontos críticos no interior do seu domínio, portanto, os máximos e mínimos estão nas extremidades do intervalo, ou seja, nos pontos 2 e -2. Note que $w(2) = -40$ e $w(-2) = -4$, que são os seus valores mínimo e máximo, respectivamente.

Comparando-se os valores de f no interior de D e na fronteira, concluimos que o seu mínimo -40 e ocorre nos pontos de fronteira de $(2, -2)$ e $(-2, 2)$ e o seu máximo é 1 e é atingido nos pontos interiores $(1, 1)$ e $(-1, -1)$. $\square$

Exemplo 7.10. *Determine os valores máximo e mínimo globais de $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ no retângulo $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$.*

Solução. Como D é limitado e fechado e f é contínua em D, então, f assume os valores máximo e mínimo globais em D. A única solução de $f_x = 0$ e $f_y = 0$ é o ponto $(1, 1)$, o qual está no interior de D. Pelo Teste da Derivada Segunda, $(1, 1)$ é um ponto de sela de f. Portanto, não há máximos nem mínimos locais de f no interior de D. Portanto, os valores máximos e mínimos globais de f ocorrem na fronteira de D.

Estudo de f na fronteira de D:

(i) No segmento de reta $y = 0$, $0 \leq x \leq 3$, temos $f(x, y) = x^2$, logo,

$$0 \leq f(x, y) \leq 9.$$

(ii) No segmento de reta $x = 0$, $0 \leq y \leq 2$, temos $f(x, y) = 2y$, logo,

$$0 \leq f(x, y) \leq 4.$$

(iii) No segmento de reta $y = 2$, $0 \leq x \leq 3$, temos $f(x, y) = (x - 2)^2$, logo,

$$0 \leq f(x, y) \leq 4.$$

(iv) No segmento de reta $x = 3$, $0 \leq y \leq 2$, temos $f(x, y) = 9 - 4y$, logo,

$$1 \leq f(x, y) \leq 9.$$

Portanto, o menor e o maior valores de f na fronteira de D são 0 e 9, respectivamente. Os quais são os valores mínimo e máximo globais de f. $\square$

Exercício 7.4. *Dada a função $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - x$ no quadrado*

$$D = \{(x,y) \,:\, 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1\},$$

encontre todos os seus pontos críticos e encontre o seus máximo e mínimo.

Exercício 7.5. *Mostre que $H(x,y) = x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2 + 1 \geq 0$ para todo (x,y).*

Exercício 7.6. *Determine os valores máximo e mínimo globais de f no conjunto D.*

(a) $f(x,y) = 4 - 3x + 4y$ e D é a região triangular fechada com vértices $(0,0)$, $(4,0)$ e $(4,5)$.
(b) $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ e $D = \{(x,y) \,:\, 0 \leq x \leq 9, 0 \leq y \leq 5\}$.
(c) $f(x,y) = 2x^3 + y^4$ e $D = \{(x,y) \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.
(d) $f(x,y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y$ e D é o quadrilátero cujos vértices são $(-2,3)$, $(2,3)$, $(2,2)$ e $(-2,-2)$.

Exercício 7.7. *Dada uma região triangular equilateral, qual é a posição do ponto P desta região, tal que o produto das distâncias de P aos vértices seja máxima?*

Exercício 7.8. *Determine o ponto do plano $6x + 4y - 3z = 2$ mais próximo do ponto $(2,-2,3)$. Qual é a distância entre eles?*

Exercício 7.9. *Determine os pontos da superfície $x^2y^2z = 1$ que estão mais próximos da origem.*

Exercício 7.10. *Determine três números positivos cuja soma seja 100 e cujo o produto seja máximo.*

7.3 Prova do Teorema 7.3

Temos a seguinte forma do Teorema do Valor Médio para integração (a qual é uma consequência do Teorema do Valor Intermediário): sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínuas e g não negativa em $[a,b]$. Então existe $\bar{t}$ em (a,b) tal que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(\bar{t}) \int_a^b g(t)dt. \tag{7.4}$$

Assumiremos que que $f(x,y)$ tenha derivadas parciais de segunda ordem contínuas na bola $B(x_o, y_o; \delta)$ e que $\nabla f(x_o, y_o) = \vec{0}$.

Seja $(x_1, y_1) \in B(x_o, y_o; \delta)$ fixo, porém arbitrário. Para $0 \leq t \leq 1$, o ponto $(tx_o + (1-t)x_1, ty_o + (1-t)y_1)$ também está na bola $B(x_o, y_o; \delta)$, pois ele esta sobre o segmento de reta que liga (x_o, y_o) a (x_1, y_1). Defina

$$w(t) = f(tx_o + (1-t)x_1, ty_o + (1-t)y_1),$$

então do Teorema Fundamental do Cálculo e integração por partes, temos

$$\begin{aligned} f(x_o,y_o)-f(x_1,y_1) &= w(1)-w(0)=\int_0^1 w'(t)\ dt=[t\,w'(t)]_0^1-\int_0^1 w''(t)tdt \\ &= w'(1)-\int_0^1 w''(t)tdt \\ &= w(1)-\frac{w''(\bar{t})}{2}, \end{aligned}$$

onde $0<\bar{t}<1$. Na última igualdade, usamos (7.4), onde tomamos $g(t)=t$. Em vista de (6.6), (6.7) e (6.8) e assumindo que $\nabla f(x_o,y_o)=\vec{0}$, temos

$$f(x_1,y_1)-f(x_o,y_o)=\frac{(\Delta x)^2 f_{xx}(\overline{x_1},\overline{y_1})+(\Delta x)(\Delta y)f_{xy}(\overline{x_1},\overline{y_1})+(\Delta y)^2 f_{yy}(\overline{x_1},\overline{y_1})}{2}, \tag{7.5}$$

onde $\Delta x=x_1-x_o$, $\Delta y=y_1-y_o$ e $(\overline{x},\overline{y})=(\bar{t}x_o+(1-\bar{t})x_1,\bar{t}y_o+(1-\bar{t})y_1)$, portanto está sobre o segmento de reta ligando (x_o,y_o) e (x_1,y_1).

A seguir estudaremos o sinal do lado direito de (7.5), para isso precisaremos do seguinte lema.

Lema 7.3.1. *Seja*

$$P(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2,$$

onde A, B e C são constantes. Defina $\Delta=AC-B^2$.

(i) Se $\Delta>0$, então, $P(x,y)$ não muda de sinal para todo $(x,y)\neq(0,0)$ e o sinal de $P(x,y)$ é o mesmo que o sinal de A.

(ii) Se $\Delta<0$, então existem duas retas passando pela origem, tal que numa delas temos $P(x,y)>0$ para todo $(x,y)\neq(0,0)$ e na outra temos $P(x,y)<0$, para todo $(x,y)\neq(0,0)$.

Prova. A seguir mostraremos (i). Se $\Delta>0$, então, $AC>0$, em particular $A\neq 0$. Podemos escrever

$$AP(x,y)=A^2x^2+2ABxy+ACy^2=(Ax+By)^2+(AC-B^2)y^2=(Ax+By)^2+\Delta y^2>0,$$

para todo $(x,y)\neq(0,0)$, portanto, A e P têm o mesmo sinal.

A seguir mostraremos (ii). Suponha que $\Delta<0$. Dado um ponto $(x_1,y_1)\neq(0,0)$, a reta que passa por este ponto e a origem é dada pelos pontos da forma $\lambda(x_1,y_1)$, onde λ assume valores reais. Por outro lado, $P(\lambda x_1,\lambda y_1)=\lambda^2P(x_1,y_1)$, logo o sinal de $P(x,y)$ é o mesmo que o de $P(x_1,y_1)$m para todo $(x,y)\neq(0,0)$. Portanto a existência de dois pontos nos quais $P(x,y)$ tem sinais diferentes, implicará na existência de duas retas passando pela origem nas quais $P(x,y)$ tem sinais contrários.

Note que

$$\begin{aligned} P(B,-A) &= AB^2-2B^2A+CA^2=A\Delta \\ P(C,-B) &= AC^2-2B^2C+CB^2=C\Delta. \end{aligned}$$

Suponha que $A \neq 0$, então da primeira relação acima, concluimos que $P(1,0) = A$ e $P(-1,0) = -A$, portanto, temos dois pontos nos quais os sinais de $P(x,y)$ são opostos. Por outro lado, se $C \neq 0$, da segunda relação acima temos que $P(0,1) = C$ e $P(0,-1) = -C$ e teremos dois pontos onde $P(x,y)$ tem sinais oposto. Finalmente, se $A = 0 = C$, portanto, $B \neq 0$, temos $P(x,y) = 2Bxy$ e concluimos que P tem sinais opostos nos pontos $(1,-1)$ e $(-1,1)$. Resumindo, podemos sempre encontrar dois pontos nos quais $P(x,y)$ têm sinais opostos. □

Agora voltemos à equação (7.5). Seja

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2.$$

A continuidade das derivadas parciais de segunda ordem de $f(x,y)$ em $B(x_o, y_o; \delta)$ implica na continuidade de $f_{xx}(x,y)$ e $\Delta(x,y)$ na mesma.

(i) Suponha $\Delta(x_o, y_o) > 0$ e $f_{xx}(x_o, y_o) \neq 0$, então existirá uma vizinhança de (x_o, y_o), a qual podemos assumir que é a bola $B(x_o, y_o; \delta)$, na qual $\Delta(x,y) > 0$ e $f_{xx}(x,y)$ tem o mesmo sinal de $f_{xx}(x_o, y_o)$. Portanto, o mesmo acontecerá $\Delta(\overline{x}, \overline{y})$ e $f_{xx}(\overline{x}, \overline{y})$, pois $(\overline{x}, \overline{y}) \in B(x_o, y_o; \delta)$. No Lema 7.3.1 tome $P(x,y)$ de modo que $A = f_{xx}(\overline{x}, \overline{y})$, $B = f_{xy}(\overline{x}, \overline{y})$ e $C = f_{yy}(\overline{x}, \overline{y})$. Então

$$f(x_1, y_2) - f(x_o, y_o) = P(\Delta x, \Delta y).$$

O Lema 7.3.1 diz que $P(x,y)$ e A têm o mesmo sinal, para todo $(x,y) \neq (0,0)$, em particular, $P(\Delta x, \Delta y)$ e A têm o mesmo sinal, se $(\Delta x, \Delta y) \neq (0,0)$, temos igualdade somente se $(\Delta x, \Delta y) = (0,0)$.

Portanto, se $f_{x,y}(x_o, y_o) > 0$, teremos $P(\Delta x, \Delta y) \geq 0$, portanto, para todo (x_1, y_1) na bola $B(x_o, y_o; \delta)$, teremos

$$f(x_1, y_1) - f(x_o, y_o) \geq 0,$$

onde a igualdade ocorre somente se $(x_1, y_1) = (x_o, y_o)$, o que mostra que $f(x,y)$ tem um mínimo local em (x_o, y_o).

De maneira análoga, se $f_{x,y}(x_o, y_o) < 0$, teremos $P(\Delta x, \Delta y) \leq 0$, portanto, para todo (x_1, y_1) na bola $B(x_o, y_o; \delta)$, teremos

$$f(x_1, y_1) - f(x_o, y_o) \leq 0,$$

onde a igualdade ocorre somente se $(x_1, y_1) = (x_o, y_o)$, o que mostra que $f(x,y)$ tem um máximo local em (x_o, y_o).

(ii) Suponha que $\Delta(x_o, y_o) < 0$. Mostraremos que em qualquer vizinhança de (x_o, y_o) a função $f(x,y)$ assume valores maiores e menores do que $f(x_o, y_o)$. Podemos escrever $(\Delta x, \Delta y) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$. Então,

$$P(\Delta x, \Delta y) = P(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = r^2 P(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta),$$

onde os coeficientes A, B e C de $P(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ dependem continuamente de $(\overline{x}, \overline{y})$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0} P(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) &= f_{xx}(x_o, y_o)(\cos\theta)^2 + 2f_{xy}(x_o, y_o)(\cos\theta \operatorname{sen}\theta) \\
&\quad + f_{yy}(x_o, y_o)(\operatorname{sen}\theta)^2 \\
&= P_o(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta). \qquad (7.6)
\end{aligned}$$

Como $\Delta(x_o, y_o) < 0$, o Lema 7.3.1 implica que $P_o(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ toma valores positivos e negativos para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (tome como θ' e θ'' os ângulos que as retas encontradas no Lema 7.3.1 fazem com o eixo x). Sejam θ' e θ'', tais que $P_o(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta') > 0$ e $P_o(\cos\theta'', \operatorname{sen}\theta'') < 0$. Por causa disso e de (7.6), estas relações também são verdadeiras para valores de r pequenos, ou seja, existe um $r_o > 0$, tal que $P(\Delta x, \Delta y) > 0$, desde que $(\Delta x, \Delta y) = (r\cos\theta', r\operatorname{sen}\theta')$ e $0 < r < r_o$ e $P(\Delta x, \Delta y) < 0$, desde que $(\Delta x, \Delta y) = (r\cos\theta'', r\operatorname{sen}\theta'')$ e $0 < r < r_o$. Com isso concluimos a demonstração do Teorema 7.3. $\square$

Capítulo 8

Leitura Complementar

Embora o objetivo deste livro tenha sido o estudo de funções de duas variáveis, neste capítulo estamos estendendo os resultados vistos nos capítulos anteriores para funções de mais de duas variáveis, servindo este capítulo mais como uma complementação dos estudos propostos. Como a passagem de três para n variáveis é imediata, vamos nos concentrar em funções de três variáveis apenas.

Os conceitos de conjuntos abertos, fechados e compactos, de vizinhança e de vizinhança deletada vistos em $\mathbb{R}^2$, estendem-se de uma maneira natural para o $\mathbb{R}^3$. Valendo a pena ressaltar que no $\mathbb{R}^3$ uma bola aberta de raio a, centrada no ponto (x_o, y_o, z_o), a qual denotaremos por $B(x_o, y_o, z_o; a)$, é dada pelo pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tais que

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 < a^2.$$

A extensão dos conceitos de domínio, de imagem e de gráfico, as definições de limite e de continuidade para funções de três variáveis também é imediata.

8.1 Derivadas parciais e diferenciabilidade de funções mais de duas variáveis

Definição 8.1. (*Derivadas parciais para funções de três variáveis*) *Seja f definida numa vizinhança do ponto (x_o, y_o, z_o), se o limite*

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x, y_o, z_o) - f(x_o, y_o, z_o)}{x - x_o}$$

existir, ele será chamado de ***derivada parcial de f em relação*** *x no ponto (x_o, y_o, z_o), o qual denotaremos por $f_x(x_o, y_o, z_o)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o, z_o)$.*

Se o limite

$$\lim_{y \to y_o} \frac{f(x_o, y, z_o) - f(x_o, y_o, z_o)}{y - y_o}$$

existir, ele será chamado de ***derivada parcial de*** f ***em relação*** y *no ponto* (x_o, y_o, z_o)*, o qual denotaremos por* $f_y(x_o, y_o, z_o)$ *ou* $\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o, z_o)$.

Finalmente, se o limite

$$\lim_{z \to z_o} \frac{f(x_o, y_o, z) - f(x_o, y_o, z_o)}{z - z_o}$$

existir, ele será chamado de ***derivada parcial de*** f ***em relação*** z *no ponto* (x_o, y_o, z_o)*, o qual denotaremos por* $f_z(x_o, y_o, z_o)$ *ou* $\frac{\partial f}{\partial z}(x_o, y_o, z_o)$.

Para uma função de três variáveis, valem as mesmas observações que foram feitas para funções de duas variáveis: ao tomarmos a derivada parcial em relação a uma das variáveis, as outras duas variáveis são tratadas como constantes e tudo se passa como se estivéssemos calculando a derivada de uma função de apenas uma variável.

Definição 8.2. (***Diferenciabilidade para função de três variáveis***) *Seja* $w = f(x, y, z)$*, tal que suas derivadas parciais* $f_x(x_o, y_o, z_o)$*,* $f_y(x_o, y_o, z_o)$ *e* $f_z(x_o, y_o, z_o)$ *existam. Dizemos que* f *é* ***diferenciável*** *em* (x_o, y_o, z_o)*, se*

$$\begin{aligned} f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y, z_o + \Delta z) &= f(x_o, y_o, z_o) + f_x(x_o, y_o, z_o)\Delta x + f_y(x_o, y_o, z_o)\Delta y \\ &\quad + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y + \epsilon_3 \Delta z, \end{aligned} \tag{8.1}$$

onde ϵ_1, ϵ_2 *e* ϵ_3 *são funções de* Δx*,* Δy *e* Δz*, as quais tendem a zero quando* Δx*,* Δy *e* Δz *tenderem simultaneamente a zero.*

Como no caso de duas variáveis, para funções de três variáveis a diferenciabilidade implica em continuidade.

Mostra-se que f_x, f_y e f_z existirem numa vizinhança de (x_o, y_o, z_o) e forem contínuas neste ponto, então $f(x, y, z)$ será diferenciável em (x_o, y_o, z_o), que é o análogo do Teorema 5.1. Deste resultado, segue-se que se as derivadas f_x, f_y e f_z forem contínuas numa vizinhança de um ponto, então f tem que ser contínua na mesma, visto que diferenciabilidade implica em continuidade.

O análogo do Teorema 6.1 para uma função de três variáveis é dado abaixo.

Teorema 8.1. *Seja* $w = f(x, y, z)$ *uma função diferenciável de* x*,* y *e* z*, onde* $x = x(t)$*,* $y = y(t)$ *e* $z = z(t)$ *são funções diferenciáveis de* t*. Então* $w = f(x(t), y(t), z(t))$ *é uma função diferenciável de* t *e*

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

O próximo teorema é uma generalização do Teorema 6.2 para uma função f de três variáveis.

Teorema 8.2. *Seja $w = F(u, v, z)$, com $u = g(x, y)$, $v = h(x, y)$ e $z = f(x, y)$. Se F, g, h e f forem diferenciáveis, então*

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Exemplo 8.1. *Seja $w = F(x, y, z)$, onde $z = f(x, y)$, com F e f diferenciáveis. Mostre que*

$$w_x(x,y) = F_x(x,y,f(x,y)) + F_z(x,y,f(x,y))\ z_x(x,y) \tag{8.2}$$

e

$$w_y(x,y) = F_y(x,y,f(x,y)) + F_z(x,y,f(x,y))\ z_y(x,y). \tag{8.3}$$

Solução. Seja (x, y) fixado, seja $\Delta z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$, então como F é diferenciável, temos

$$\begin{aligned} w(x+\Delta x,y) - w(x,y) &= F(x+\Delta x, y, f(x,y)+\Delta z) - F(x,y,f(x,y)) \\ &= F_x(x,y,f(x,y))\Delta x + F_z(x,y,f(x,y))\Delta z \\ &\quad +\epsilon_1\ \Delta x + \epsilon_2\ 0 + \epsilon_3\,\Delta z. \end{aligned}$$

Como f é contínua, ϵ_1, ϵ_2 e ϵ_3 tendem a zero quando Δx. Logo,

$$w_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{w(x+\Delta x,y) - w(x,y)}{\Delta x} = F_x(x,y,f(x,y)) + F_z(x,y,f(x,y))\ z_x,$$

o que mostra (8.2). De maneira análoga, mostra-se (8.3). □

8.2 Derivação implícita

Consideremos uma equação da forma

$$F(x,y,z) = 0, \tag{8.4}$$

onde as derivadas parciais de primeira ordem de $F(x,y,z)$ são contínuas numa vizinhança de (x_o, y_o, z_o). Se

$$F(x_o, y_o, z_o) = 0$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_o, y_o, z_o) \neq 0,$$

então o **Teorema da Função Implícita**, nos afirma que a equação (8.4) nos define a variável z com função de x e y, numa vizinhança do ponto (x_o, y_o), mais precisamente, existe uma função $z = f(x,y)$, diferenciável com derivadas parciais de primeira ordem contínuas numa vizinhança V do ponto (x_o, y_o), tal que

$$f(x_o, y_o) = z_o, \quad F(x, y, f(x,y)) = 0, \text{ para todo } (x,y) \in V.$$

A seguir veremos como calcular as derivadas parciais da função $z = f(x,y)$.
Como

$$w(x,y) = F(x,y,f(x,y)) = 0,$$

para todo $(x,y) \in V$, segue que $w_x(x,y) = 0 = w_y(x,y)$ em V, logo de (8.2) e (8.3), temos

$$0 = \frac{\partial w}{\partial x} = F_x + F_z\, z_x$$

e

$$0 = \frac{\partial w}{\partial y} = F_y + F_z\, z_y.$$

Portanto,

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z}, \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z}. \tag{8.5}$$

Exemplo 8.2. *Calcule z_x e z_y, onde $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.*

Solução. Seja $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$, então $F_x = 3x^2 + 6yz$, $F_y = 3y^2 + 6xz$ e $F_z = 3z^2 + 6xy$, portanto de (8.5) concluimos que

$$z_x = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}, \quad z_y = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}.$$

□

Na prática não precisamos guardar as fórmulas dadas em (8.5), por exemplo, dada uma equação tipo

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1,$$

se assumirmos que ela define $z = f(x, y)$, o que fazemos para calcular z_x é derivarmos a equação

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6x\,y\,z = 1$$

parcialmente em relação a x, lembrando que z é função de x e y, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 + y^3 + z^3 + 6x\,y\,z\right) = \frac{\partial 1}{\partial x},$$

o que nos dá

$$3x^2 + 3z^2\, z_x + 6\,y\,z + 6x\,y\,z_x = 0,$$

da qual encontramos $z_x = -\frac{x^2+2\,y\,z}{z^2+2xy}$. De maneira análoga, podemos encontramos z_y.

Exercício 8.1. *Calcule z_x e z_y, se $z = f(x, y)$ é definida implicitamente pela equação abaixo.*

(a) $2xz^3 - 3yz^2 + x^2y^2 + 4z = 0$
(b) $xz^2 + 2x^2y - 4y^2z + 3y - 2 = 0$
(c) $xe^{yz} - 2ye^{xz} + 3ze^{xy} = 1$
(d) $yx^2 + z^2 + \cos(xyz) = 4$
(e) $x^x + y^2 + z^2 = 3xyz$
(f) $yz = \ln(x + z)$.

8.3 Plano tangente à superfície $F(x, y, z) = 0$

Seja S a superfície dada pela equação $F(x, y, z) = 0$, onde F é diferenciável. Vamos encontrar a equação do plano tangente a S no ponto (x_o, y_o, z_o), onde $F_z(x_o, y_o, z_o) \neq 0$. De acordo com o Teorema da Função Implícita, a equação $F(x, y, z) = 0$ define implicitamente $z = f(x, y)$ numa vizinhança de (x_o, y_o). De (5.4) a equação deste plano é dada por

$$z = zo + f_x(x_o, y_o)(x - x_o) + f_y(x_o, y_o)(y - y_o),$$

por outro lado, de (8.5)

$$f_x(x_o, y_o) = -\frac{F_x(x_o, y_o, z_o)}{F_z(x_o, y_o, z_o)} \quad e \quad f_y(x_o, y_o) = -\frac{F_y(x_o, y_o, z_o)}{F_z(x_o, y_o, z_o)},$$

portanto, a equação do plano tangente a S no ponto (x_o, y_o, z_o) é

$$F_x(x_o, y_o, z_o)(x - x_o) - F_y(x_o, y_o, z_o)(y - y_o) + F_z(x_o, y_o, z_o)(z - z_o) = 0. \tag{8.6}$$

Portanto, o vetor $\nabla F(x_o, y_o, z_o)$ é **normal à superfície** S **no ponto** (x_o, y_o, z_o).

Exemplo 8.3. *Encontre a equação do plano tangente à superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, no ponto $(0, 0, 1)$.*

Solução. Neste caso, $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Note que $F(1, 0, 0) = 0$ e como $F_z = 2z$, segue-se que $F_z(0, 0, 1) = 2 \neq 0$, portanto, do Teorema da Função Implícita, a equação $F(x, y, z) = 0$ define implicitamente $z = f(x, y)$, para (x, y) numa vinhança de $(0, 0)$. Temos $F_x(0, 0, 1) = 0$ e $F_y(0, 0, 1) = 0$. Disso e de (8.6), concluimos que a equação do plano tangente no ponto dado é

$$z = 1.$$

□

Nas contas acima assumimos que $F_z(x_o, y_o, z_o) \neq 0$, se isto não acontecer, podemos verificar se $F_x(x_o, y_o, z_o) \neq 0$ ou $F_y(x_o, y_o, z_o) \neq 0$, no primeiro caso o Teorema da Função Implícita nos dirá que $F(x, y, z) = 0$ nos define implicitamente $x = g(y, z)$ numa vizinhança de (y_o, z_o) e no segundo caso ele nos dirá que $F(x, y, z) = 0$ nos define implicitamente $y = h(x, z)$ numa vizinhança de (x_o, z_o) e podemos proceder como acima e encontrarmos a equação do planto tangente a S no ponto (x_o, y_o, z_o), dada por (8.6).

Exercício 8.2. *Determine as equações dos planos tangentes às superfícies abaixo, no ponto especificado.*

(a) $xyz - 4xz^3 + y^3 = 10$, $P(-1, 2, 1)$
(b) $9x^2 - 4y^2 - 25z^2 = 40$, $P(4, 1, -2)$.

8.4 Máximos e mínimos para funções de três variáveis

Para uma função de n variáveis $f(x_1, \ldots, x_n)$, os conceitos de máximo e de mínimo globais, máximo e mínimo locais, ponto de sela, etc, são definidos de maneira análoga ao caso de duas variáveis. Além disso, valem resultados similares, em particular, se uma função $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tiver um máximo ou mínimo local num dado ponto, no qual todas as derivadas parciais de primeira ordem existam, então elas devem se anular no mesmo. Além disso, temos uma classificação dos pontos críticos em função do sinal de determinantes onde as entradas das matrizes envolvidas são as derivadas parciais de segunda ordem de f. Por exemplo, se f for uma função nas variáveis x, y e z, definimos as seguintes matrizes

$$H_1 = [f_{xx}], \quad H_2 = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \qquad H_3 = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}.$$

Então a conclusão é a seguinte:

1. se $\det H_1(x_o, y_o, z_o) > 0$, $\det H_2(x_o, y_o, z_o) > 0$ e $\det H_3(x_o, y_o, z_o) > 0$, existe um mínimo local em (x_o, y_o, z_o);

2. se $\det H_1(x_o, y_o, z_o) < 0$, $\det H_2(x_o, y_o, z_o) > 0$ e $\det H_3(x_o, y_o, z_o) < 0$, existe um máximo local em (x_o, y_o, z_o).

Exemplo 8.4. *Encontre os pontos críticos de*

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3x - 2z,$$

e os classifique.

Solução. Note que $f_x = 2x - y + 3$, $f_y = 2y - x$ e $f_z = 2z - 2$. Portanto os pontos críticos serão soluções de

$$\begin{aligned} 2x - y + 3 &= 0 \\ -x + 2y &= 0 \\ 2z - 2 &= 0, \end{aligned}$$

cuja solução é $(-2, -1, 1)$. Por outro lado,

$$H_3 = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $\det H_1 = 2$, $\det H_2 = 3$ e $\det H_3 = 6$. Disso concluimos que $(-2, -1, 2)$ é um mínimo local. □

Exercício 8.3. *Calcular as arestas x, y, z de um paralelepípedo retângulo de dado volume V, de maneira que a sua superfície total seja mínima.*

As noções de derivada direcional e de gradiente se estendem para funções de mais de duas variáveis. Em particular, para uma função $w = f(x, y, z)$, define-se o seu gradiente de f no ponto (x, y, z) como

$$\nabla f(x, y, z) = f_x\,\vec{\imath} + f_y\,\vec{\jmath} + f_z\,\vec{k}.$$

Por exemplo, se $f(x, y, z) = x^2yz$, então,

$$\nabla f(x, y, z) = 2xyz\,\vec{\imath} + x^2z\,\vec{\jmath} + x^2y\,\vec{k}.$$

A derivada direcional de uma função diferenciável $w = f(x, y, z)$ no ponto (x, y, z), na direção do vetor unitário $\vec{n} = (n_1, n_2, n_2)$ é definida como

$$D_{\vec{n}}(x, y, z) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + n_1t, x + n_2t, z + n_3t) - f(x, y, z)}{t}$$

portanto, do Teorema 8.1, temos

$$D_{\vec{n}}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \vec{n}.$$

Logo, o valor máximo da derivada direcional $D_{\vec{n}}f(x, y, z)$ é $||\nabla f(x, y, z)||$ e ocorre quando o vetor unitário $\vec{n}$ tem a mesma direção e sentido do vetor gradiente $\nabla f(x, y, z)$.

Exercício 8.4. *Sabendo-se que a temperatura no ponto (x, y, z) é dada por*

$$T(x, y, z) = 100e^{-x^2-3y^2-9z^2},$$

onde T é medido em graus centígrados, x, y e z em metros, determine a taxa de variação da temperatura no ponto $P(2, -1, 1)$ na direção do vetor $(1, -1, 1)$. Qual é a direção de maior crescimento da temperatura em P? Encontre a taxa de crescimento máxima em P.

8.5 Máximos e mínimos com vínculos: multiplicadores de Lagrange

É muito comum encontrarmos problemas cujas soluções consistem em maximizarmos ou minizarmos o valor de uma função

$$z = f(x, y),$$

sujeita a uma restrição do tipo

$$g(x, y) = 0,$$

onde f e g têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Ou seja, no cálculo de f estamos nos restringindo apenas aos seus valores sobre os pontos (x, y) que estão sobre uma curva C, dada pela condição $g(x, y) = 0$, veja Figura 8.1.

Nos casos mais simples, podemos resolver a equação $g(x, y) = 0$ em relação a uma variável, por exemplo, $y = \varphi(x)$, o que resultará em $z = f(x, \varphi(x))$. Neste caso teríamos um problema de máximos e mínimos de uma função de uma variável, algo já estudado. Entretanto, nem sempre é possível resolver explicitamente a equação $g(x, y) = 0$ para uma das variáveis, mesmo que teoricamente o Teorema da Função Implícita nos garanta que localmente possamos expressar uma das variáveis como função da outra.

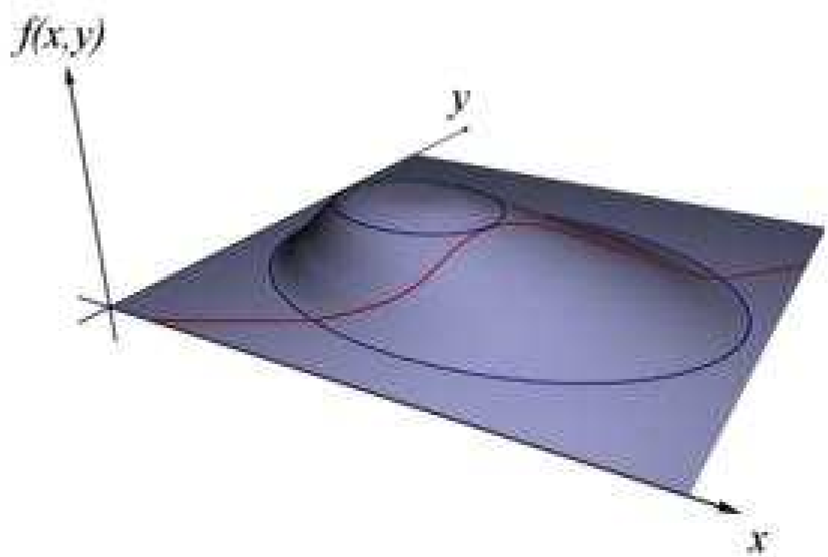

Figura 8.1: O problema de máximo e mínimo de $f(x, y)$ sujeito à restrição $g(x, y) = 0$, que é a curva vermelha na figura.

O método dos multiplicadores de Lagrange, que descreveremos a seguir, nos fornecerá uma estratégia para encontrarmos máximos e mínimos de uma função $z = f(x, y)$ sujeita à condição $g(x, y) = 0$.

Sob as hipóteses dadas, C admite uma parametrização suave, $x = x(t)$ e $y = y(t)$, para t pertencendo a algum intervalo I. Suponha que no ponto $(x_o, y_o) = (x(t_o), y(t_o))$ de C a função f tenha um extremo. Então a função de uma variável $f(x(t), y(t))$ tem um extremo em t_o, logo,

$$\frac{d}{dt} f(x(t_o), y(t_o)) = 0.$$

Por outro lado, da Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(x(t_o), y(t_o)) &= f_x(x(t_o), y(t_o))x'(t_o) + f_y(x(t_o), y(t_o))y'(t_o) \\ &= f_x(x_o, y_o)x'(t_o) + f_y(x_o, y_o)y'(t_o) \\ &= \nabla f(x_o, y_o) \cdot \vec{r}'(t_o). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla f(x_o, y_o) \cdot \vec{r}'(t_o) = 0,$$

o que mostra que $\nabla f(x_o, y_o) \perp \vec{r}'(t_o)$. Por outro lado, de acordo com o Teorema 6.5, $\nabla g(x_o, y_o) \perp \vec{r}'(t_o)$, visto que C é uma curva de nível para g. Como $\nabla f(x_o, y_o)$ e $\nabla g(x_o, y_o)$ são ortogonais ao mesmo vetor, eles devem ser paralelos, ou seja

$$\nabla f(x_o, y_o) = \lambda \nabla g(x_o, y_o).$$

Com isso provamos o seguinte teorema:

Teorema 8.3. (***Teorema de Lagrange***) *Sejam f e g funções de duas variáveis, tais que as suas derivadas parciais de primeira ordem sejam contínuas numa região do plano xy, na qual $\nabla g(x, y) \neq \vec{0}$. Se f tem um extremo $f(x_o, y_o)$ sujeito ao vínculo $g(x, y) = 0$, então existe um número real λ, chamado de* ***multiplicador de lagrange****, tal que*

$$\nabla f(x_o, y_o) = \lambda \nabla g(x_o, y_o).$$

Se definirmos

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y),$$

então,

$$\nabla F(x, y, \lambda) = \vec{0}$$

se, e somente se,

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \quad e \quad g(x, y) = 0.$$

Portanto o Teorema 8.3 nos diz que os pontos de máximos e mínimos relativos de $f(x, y)$ sujeito à restrição $g(x, y) = 0$ podem ser encontrados a partir de um problema de máximos e mínimos sem vínculos. Ou seja,

1. Encontramos os pontos $(x_1, y_1, \lambda_1), \ldots, (x_n, y_n, \lambda_n)$ que são soluções de
$$\nabla F(x, y, \lambda) = \vec{0};$$
2. Os pontos onde ocorrem os extremos relativos de f estão entre $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$;
3. Se f tiver um máximo, sujeito ao vínculo $g(x, y) = 0$, ele é dado por
$$\max\{f(x_1, y_1), \ldots f(x_n, y_n)\}.$$
De maneira análoga, se f tiver um mínimo, sujeito ao vínculo $g(x, y) = 0$, ele é dado por
$$\min\{f(x_1, y_1), \ldots f(x_n, y_n)\}.$$

Exemplo 8.5. *Maximize $f(x, y) = x + y$, sujeito à restrição $x^2 + y^2 = 1$.*

Solução. Primeiramente, como f é uma função contínua e estamos restringindo f a pontos do círculo $x^2 + y^2 = 1$ que é um conjunto fechado e limitado do plano, necessariamente, os valores máximo e mínimo de f são atingidos em algum ponto do círculo. No método de Lagrange teremos $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Logo,
$$F(x, y, \lambda) = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$
portanto,
$$\nabla F = (1 - 2\lambda x, 1 - 2\lambda y, -x^2 - y^2 + 1) = \vec{0},$$
se, e somente se, tivermos
$$\begin{aligned} 2\lambda x &= 1 \\ 2\lambda y &= 1 \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Note que da primeira ou da segunda equações devemos ter $\lambda \neq 0$; caso contrário, seríamos levado a equação $0 = 1$. Como $\lambda \neq 0$, da primeira e da segunda equações concluimos que $x = \frac{1}{2\lambda} = y$, portanto, $x = y$. Fazendo-se $x = y$ na terceira equação, temos $2x^2 = 1$, portanto, $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Logo, temos os seguintes valores para (x, y):
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \ e \ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$
Calculando f nestes pontos, temos $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$ e $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$. Portanto, o maior de f é $\sqrt{2}$ e o menor valor de f é $-\sqrt{2}$. □

A seguir discutiremos um pouco sobre a geometria por trás do método de Lagrange.

Suponha que tenhamos desenhado no plano xy as curvas de níveis de $f(x,y)$ e a curva C que representa $g(x,y) = 0$. Se num dado ponto (x_o, y_o), $f(x,y)$ com o vínculo $g(x,y) = 0$ tiver um máximo local ou de mínimo local, então C deve tangenciar a curva de nível $f(x,y) = f(x_o, y_o)$. De fato, sabemos que neste ponto $\nabla g(x_o, y_o)$ e $\nabla f(x_o, y_o)$ devem ser perpendiculares, mas $\nabla g(x_o, y_o)$ deve ser perpendicular a C, pois esta é uma das suas curvas de níveis. Portanto, C deve ser tangente à curva de nível $f(x,y) = f(x_o, y_o)$. Com isto temos **um método geométrico** para encontrarmos o máximo e o mínimo local de $f(x,y)$ com o vínculo $g(x,y) = 0$ baseado no método de Lagrange: eles serão os pontos (x_o, y_o) nos os quais a curva $g(x,y) = 0$ tangencia $f(x,y) = f(x_o, y_o)$.

Exercício 8.5. *Determinar o máximo e o mínimo da função* $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$, *onde as variáveis* x *e* y *estão sujeitas à restrição* $y - x = \pi/4$.

Exercício 8.6. *Determinar o máximo e o mínimo da função* $z = 2x + y$ *sobre o círculo*

$$x^2 + y^2 = 5.$$

Interprete geometricamente o problema.

Exercício 8.7. *Encontre o máximo de* $f(x,y) = x^2 y$, *sujeito à restrição* $x^2 + y^2 = 3$.

Exercício 8.8. *Determinar o ponto da elipse* $x^2 + 4y^2 = 36$ *situado no primeiro quadrante, no qual a tangente à curva forma com os eixos coordenados o triângulo de menor área possível. Calcular a área deste triângulo.*

Exercício 8.9. *Ache os valores máximo e mínimo de* $f(x,y) = xy$, *sabendo-se que* (x,y) *está restrito à elipse* $4x^2 + y^2 = 4$.

O Teorema de Lagrange pode ser estendido para o caso de funções de mais de duas variáveis e quando temos mais de um vínculo. A idéia é que para cada vínculo introduzamos um multiplicador de lagrange diferente. Dois exemplos de tais generalizações são dados a seguir.

1. Se a função a ser otimizada for a função $f(x,y,z)$ e tivermos apenas um vínculo

   $$g(x,y,z) = 0,$$

   o que corresponde a nos restringirmos aos pontos (x,y,z) de uma superfície no espaço, então, devemos considerar a função

   $$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$$

   e encontrarmos as soluções $(x_i, y_i, z_i, \lambda_i)$, de

   $$\nabla F(x,y,z,\lambda) = \vec{0}.$$

   Os extremos de f com o vínculo $g(x,y,z) = 0$ estarão entre os pontos (x_i, y_i, z_i). Mais precisamente, se f restrita a $g(x,y,z) = 0$ tiver um máximo ele será dado por $\max_i\{f(x_i, y_i, z_i)\}$ e de maneira análoga, se f restrita a $g(x,y,z) = 0$ tiver um mínimo ele será dado por $\min_i\{f(x_i, y_i, z_i)\}$.

2. Se a função a ser otimizada for a função $f(x,y,z)$ e tivermos dois vínculos

$$g(x,y,z) = 0 \text{ e } h(x,y,z) = 0,$$

o que corresponde restringirmos aos pontos (x,y,z) de uma curva no espaço, então, devemos considerar a função

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) - \mu h(x,y,z)$$

e encontrarmos as soluções $(x_i, y_i, z_i, \lambda_i, \mu_i)$, de

$$\nabla F(x,y,z,\lambda) = \vec{0}.$$

Os extremos de f coms os vínculos $g(x,y,z) = 0$ $h(x,y,z) = 0$ estarão entre os pontos (x_i, y_i, z_i). Mais precisamente, se f sujeita às restrições $g(x,y,z) = 0$ e $h(x,y,z) = 0$ tiver um máximo ele será dado por $\max_i\{f(x_i,y_i,z_i)\}$ e de maneira análoga, se f sujeita às restrições $g(x,y,z) = 0$ e $h(x,y,z) = 0$ tiver um mínimo ele será dado por $\min_i\{f(x_i,y_i,z_i)\}$.

Exemplo 8.6. *Encontre o volume da maior caixa retangular de lados paralelos aos planos coordenados, que possa ser inscrita no elipsóide* $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$.

Solução. Por simetria o volume da caixa será 8 vezes o volume da sua restrição ao primeiro octante, ou seja,

$$V(x,yz) = 8xyz,$$

onde $x,y,z \geq 0$. Neste caso, (x,y,z) são pontos do elipsóide $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144 = 0$ que é o vínculo. Ou seja, $g(x,y,z) = 16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144$. Portanto,

$$F(x,y,z,\lambda) = xyz - \lambda(16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144).$$

Logo, $\nabla F(x,y,z,\lambda) = \vec{0}$ é equivalente a

$$\begin{aligned} 8yz &= 32\lambda x \\ 8xz &= 8\lambda y \\ 8xy &= 18\lambda z \\ 144 &= 16x^2 + 4y^2 + 9z^2. \end{aligned}$$

Como f é contínua e o elipsóide restrito ao primeiro quadrante é uma região limitada e fechada, então sobre o mesmo $f(x,y,z)$ assume o seus valores máximo e mínimo. É claro que existem pontos sobre o elipsóide para os quais todas as coordenadas são diferentes de zero, portanto, o valor máximo de V não pode ser zero. Se alguma das coordenadas de (x,y,z) for zero, então, o volume correspondente seria zero, portanto, $V(x,y,z)$ não poderia ser máximo. Assim, no que se segue vamos supor que x, y e z não sejam nulos. Portanto, temos

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{yz}{4x} = \frac{xz}{y} = \frac{4xy}{9z} \\ 144 &= 16x^2 + 4y^2 + 9z^2. \end{aligned}$$

Logo, temos as seguintes relações $y^2 = 4x^2$ e $4y^2 = 9z^2$ e $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$. Eliminando-se y e z, temos $48x^2 = 144$, ou seja, $x = \sqrt{3}$, portanto, $y = 2\sqrt{3}$ e $z = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Logo, o volume máximo é $8xyz = 64\sqrt{3}$. $\square$

Exemplo 8.7. *Encontre o ponto do plano $2x + 3y + 4z = 12$ no qual $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 5z^2$ assume o seu valor mínimo.*

Solução. Note que os valores de x, y e z podem ficar arbitriamente grandes sobre o plano, o mesmo acontecerá com $f(x, y, z)$, ou seja, f não tem valor máximo sobre o plano.

Temos que encontrar as soluções de $\nabla F(x, y, z, \lambda) = \vec{0}$, onde

$$F(x, y, z, \lambda) = 4x^2 + y^2 + 5z^2 - \lambda(2x + 3y + 4z - 12).$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} 8x &= 2\lambda \\ 2y &= 3\lambda \\ 10z &= 4\lambda \\ 12 &= 2x + 3y + 4z, \end{aligned}$$

o que é equivalente a $\lambda = 4x = \frac{2}{3}y = \frac{5}{2}z$ e $2x + 3y + 4z = 12$. Ou ainda, $y = 6x$, $z = 10x$ e $2x + 3y + 4z = 12$. Portanto, eliminando-se y e z, temos $x = \frac{5}{11}$, o que implica que $y = \frac{30}{11}$ e $y = \frac{8}{11}$. Como f não tem máximo sobre o plano, então o seu ponto crítico deve ser de mínimo. $\square$

Exercício 8.10. *Seja C a curva no primeiro octante resultante da interseção do parabolóide $2z = 16 - x^2 - y^2$ e do plano $x + y = 4$. Ache os pontos de C que estão mais próximos e mais distantes da origem.*
Sugestão: *A função a ser otimizada é $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ e os vínculos são $g(x, y, z) = 2z - 16 + x^2 + y^2)$ e $h(x, y, z) = x + y - 4 = 0$.*

Exercício 8.11. *Nos exercícios abaixo, utilize o método dos multiplicadores de Lagrange para achar os extremos de f sujeito aos vínculos dados.*

(a) $f(x, y) = x^2 - y^2$ *e* $x^2 + y^2 - 1 = 0$
(b) $f(x, y) = y^2 - 4xy + 4x^2$ *e* $x^2 + y^2 - 1 = 0$
(c) $f(x, y) = x^2y$ *e* $x^2 + 2y^2 = 6$
(d) $f(x, y) = x^2 + y^2$ *e* $g(x, y) = x^4 + y^4 = 1$
(e) $f(x, y) = y - \cos x + 2x$, $x^2 + 2y^2 = 1$
(f) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ *e* $x - y + z = 1$
(g) $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$ *e* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

(h) $f(x,y,z) = z - x^2 - y^2$, $x + y + z = 1$ *e* $x^2 + y^2 = 4$
(i) $f(x,y,z) = xy + yz$, $x^2 + y^2 = 2$ *e* $yz = 2$
(j) $f(x,y,z) = x + 2y$, $x + y + z = 1$ *e* $y^2 + z^2 = 4$
(k) $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$, $x - y + z = 1$ *e* $x^2 + y^2 = 1$

Exercício 8.12. *Determine os valores de extremos de* $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$ *na região descrita pela desigualdade* $x^2 + y^2 \leq 16$.

Exercício 8.13. *Determine os volumes máximo e mínimo de uma caixa retangular cuja superfície tem 1500cm*^{2} *e cuja soma dos comprimentos das arestas é 200 cm.*

Referências Bibliográficas

[1] Dan Avritzer, *Geometria Analítica e Álgebra Linear: uma Visão Geométrica, TOMO II*, Editora ufmg, dezembro de 2008.

[2] James Stewart, *Cálculo Vol. II*, Pioneira Thompsom Learning, 2002, quarta edição

[3] George F. Simmons, *Cálculo com Geometria Analítica*, Volume 2, McGraw-Hill Ltda

[4] Earl W. Swokowski, *Cálculo com Geometria Analítica*, Volume 2, McGraw-Hill Ltda

[5] Howard Anton, *Cálculo*, Volume 2, John Wiley & Sons, 1999