Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

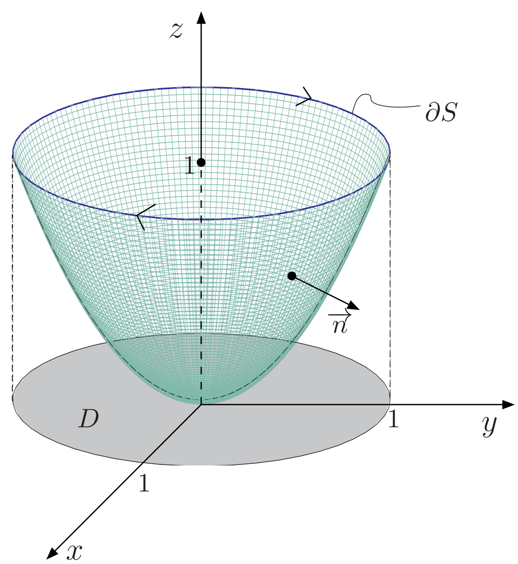
Cálculo 3A – Lista 13

Exercício 1: Verifique o Teorema de Stokes, calculando as duas integrais do enunciado, para $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y, -x, 0)$, S o parabolóide $z = x^2 + y^2$, com $0 \leq z \leq 1$, e $\overrightarrow{n}$ apontando para fora de S.

Solução: Devemos verificar a seguinte igualdade:

$$\oint_{\partial S^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_S \text{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\; dS\,.$$

Os esboços de S e ∂S estão representados a seguir.



O bordo de S, ∂S, é a circunferência de raio 1, centrada em $(0,0,1)$, contida no plano $z = 1$. Para que ∂S fique orientada positivamente com relação a S, devemos orientá-lo no sentido horário quando visto de cima. Temos então que ∂S^- é dado por $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ e $z = 1$, com $0 \leq t \leq 2\pi$ donde $dx = -\operatorname{sen} t$, $dy = \cos t$ e $dz = 0$. Então:

$$\oint_{\partial S^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -\oint_{\partial S^-} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -\oint_{\partial S^-} y\ dx - x\ dy + 0\ dz =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \big[(\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) - (\cos t)(\cos t)\big] dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \big(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t\big)\, dt = 2\pi\,.$$

Temos $S : z = \underbrace{x^2 + y^2}_{f(x,y)}$, com $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$ donde um vetor normal a S é $\overrightarrow{N} = (-f_x, -f_y, 1) = (-2x, -2y, 1)$ e $dS = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\ dxdy$. Como $\overrightarrow{n}$ aponta para baixo, então $\overrightarrow{n} = \dfrac{(2x, 2y, -1)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$. Temos também que rot$\overrightarrow{F} = (0, 0, -2)$. Então:

$$\iint_S \text{rot}\ \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iint_D (0, 0, -2) \cdot (2x, 2y, -1)\, dxdy =$$

$$= \iint_D 2\ dxdy = 2A(D) = 2\pi$$

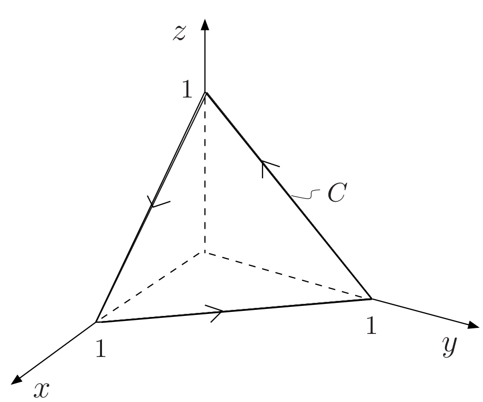
verificando neste caso o teorema de Stokes.

Exercício 2: Calcule a circulação do campo

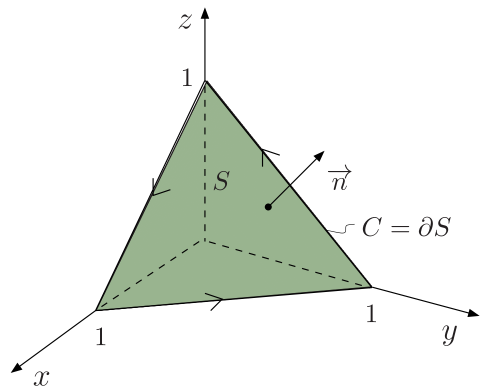
$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = y\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + xz\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z^2\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$$

ao redor da curva C fronteira do triângulo cortado do plano $x + y + z = 1$ pelo primeiro octante, no sentido horário quando vista da origem.

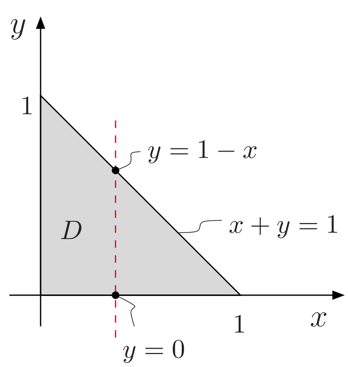
Solução: O esboço de C está representado na figura que se segue.



Se C está orientada no sentido horário quando vista da origem então C está orientada no sentido anti-horário quando vista do eixo y positivo. Calculemos a integral de linha pelo Teorema de Stokes. Seja então a superfície S, porção do plano $x+y+z=1$, limitada por C, conforme a figura a seguir.



A superfície S é dada por $S : z = \underbrace{1-x-y}_{=f(x,y)}$, com $(x,y) \in D$, onde D é a projeção de S sobre o plano xy.



Temos $\overrightarrow{N} = (-f_x, -f_y, 1) = (1,1,1)$. De acordo com a orientação de $C = \partial S$, devemos tomar $\overrightarrow{n}$ apontando para cima. Logo, $\overrightarrow{n} = \dfrac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$ e $dS = \sqrt{3}\,dxdy$. Pelo Teorema de Stokes, temos:

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_S \text{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\ dS$$

onde

$$\text{rot}\,\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & xz & z^2 \end{vmatrix} = (-x, 0, z-1)\,.$$

Logo:

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_D (-x\,,\,0\,,\,1-x-y-1) \cdot \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}\ dxdy =$$

$$= \iint_D (-x-x-y)\ dxdy = -\iint_D (2x+y)\ dxdy =$$

$$= -\int_0^1 \int_0^{1-x} (2x+y)\ dydx = -\int_0^1 \left[2xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x}\ dx =$$

$$= -\int_0^1 \left(2x - 2x^2 + \frac{1-2x+x^2}{2}\right)\ dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(4x - 4x^2 + 1 - 2x + x^2\right)\ dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(2x - 3x^2 + 1\right)\ dx = -\frac{1}{2}\left[x^2 - x^3 + x\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\,.$$

Exercício 3: Use o teorema de Stokes para mostrar que a integral de linha é igual ao valor dado, indicando a orientação da curva C.

$$\oint_C (3y+z)\ dx + (x+4y)\ dy + (2x+y)\ dz = -\frac{3\sqrt{2}\ \pi a^2}{4}$$

onde C é a curva obtida como interseção da esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ com o plano $y+z=a$.

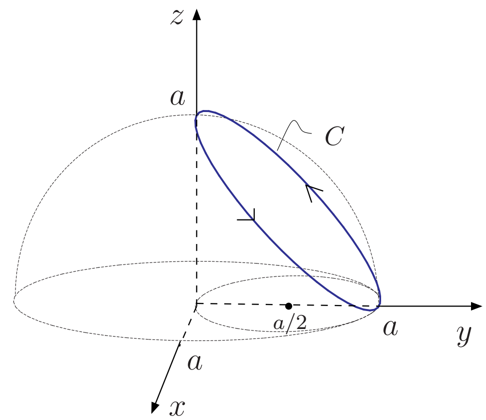
Solução: Calculemos a interseção das superfícies:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = a^2 \\ z = a-y \end{cases} \Rightarrow\ x^2+y^2+(y-a)^2 = a^2$$

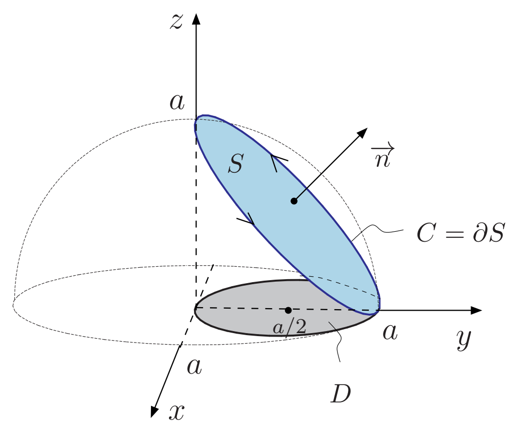
$$\Rightarrow\ x^2 + 2\left(y-\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow\ \frac{x^2}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{\left(y-\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = 1$$

que é uma elipse de centro $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ e semi-eixos $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{a}{2}$. Esta elipse é a projeção de C sobre o plano xy. A curva C com a orientação escolhida pode ser visualizada na figura que se segue.



Considere a superfície S, porção do plano $z = a - y$, limitada por C, que pode ser vista na figura a seguir.



A projeção de S sobre o plano xy é a região D dada por

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{\left(y - \frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} \leq 1\,.$$

De acordo com a orientação de $C = \partial S$, segue que $\overrightarrow{n}$ aponta para cima. Então $\overrightarrow{n} = \dfrac{\overrightarrow{N}}{\|\overrightarrow{N}\|}$, onde $\overrightarrow{N} = \left(-\dfrac{\partial z}{\partial x}\,,\ -\dfrac{\partial z}{\partial y}\,,\ 1\right) = (0,1,1)$. Logo $\overrightarrow{n} = \dfrac{(0,1,1)}{\sqrt{2}}$ e $dS = \sqrt{2}\ dxdy$. Temos:

$$\text{rot}\,\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3y+z & x+4y & 2x+y \end{vmatrix} = (1,\ 1-2,\ 1-3) = (1,\ -1,\ 2)\,.$$

Do teorema de Stokes, temos:

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_S \text{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\ dS = \iint_D (1\ -1,\ 2) \cdot \frac{(0,\ 1,\ 1)}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}\ dxdy =$$

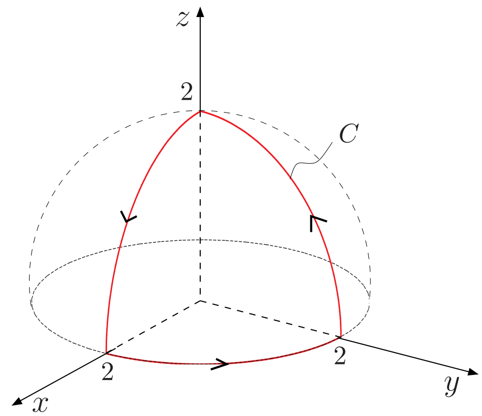
$$= \iint_D (-3)\ dxdy = -3 \cdot A(D) = -3\pi \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} = -\frac{3\sqrt{2}\ \pi a^2}{4}\,.$$

Exercício 4: Calcule o trabalho realizado pelo campo de força

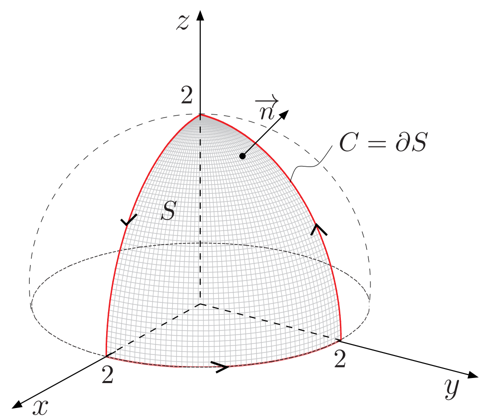
$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(x^x + z^2\right)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(y^y + x^2\right)\overrightarrow{\mathbf{j}} + \left(z^z + y^2\right)\overrightarrow{\mathbf{k}}$$

quando uma partícula se move sob sua influência ao redor da borda da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ que está no primeiro octante, na direção anti-horário quando vista por cima.

Solução: O esboço de C está representado na figura que se segue.



Seja S a porção da esfera no primeiro octante, limitada por C. Então $\partial S = C$.



Com a orientação de ∂S, temos que $\overrightarrow{n}$ aponta para cima. Logo, $\overrightarrow{n} = \frac{(x,y,z)}{a} = \frac{(x,y,z)}{2}$. Temos

$$W = \int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \iint_S \text{rot}\,\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\;dS$$

onde

$$\text{rot}\,\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^x+z^2 & y^y+x^2 & z^z+y^2 \end{vmatrix} = (2y, 2z, 2x)$$

Então

$$W = \iint_S (2y,2z,2x)\cdot\frac{(x,y,z)}{2}\,dS = \iint_S (xy+yz+xz)\;dS\,.$$

Para calcular esta última integral, devemos parametrizar S. Temos

$$S : \varphi(\phi, \theta) = (2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta,\ 2 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta,\ 2 \cos \phi)$$

com $(\phi, \theta) \in D : \begin{cases} 0 \leq \phi \leq \pi/2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases}$. Temos $dS = a^2 \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\theta = 4 \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\theta$. Logo:

$$\begin{aligned}
W &= \\
&= \iint_D \big(4 \operatorname{sen}^2 \phi \cos \theta \operatorname{sen} \theta + 4 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \operatorname{sen} \theta + 4 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \cos \theta\big) 4 \operatorname{sen} \phi \ d\phi \ d\theta = \\
&= 16 \iint_D \big(\operatorname{sen}^3 \phi \cos \theta \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi \cos \theta\big) \, d\phi \ d\theta = \\
&= 16 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \big(\operatorname{sen}^3 \phi \cos \theta \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi \cos \theta\big) \, d\theta \ d\phi = \\
&= 16 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 \phi \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} + \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi/2} + \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi \operatorname{sen} \theta \Big|_0^{\pi/2} \ d\phi = \\
&= 16 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\operatorname{sen}^3 \phi}{2} + 2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi\right) \ d\phi = \\
&= 8 \int_0^{\pi/2} \big(1 - \cos^2 \phi\big) \operatorname{sen} \phi \ d\phi + 32 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi \ d\phi = \\
&= 8 \left[-\cos \phi + \frac{\cos^3 \phi}{3}\right]_0^{\pi/2} + 32 \left[\frac{\operatorname{sen}^3 \phi}{3}\right]_0^{\pi/2} = 16\,.
\end{aligned}$$

Exercício 5: Calcule

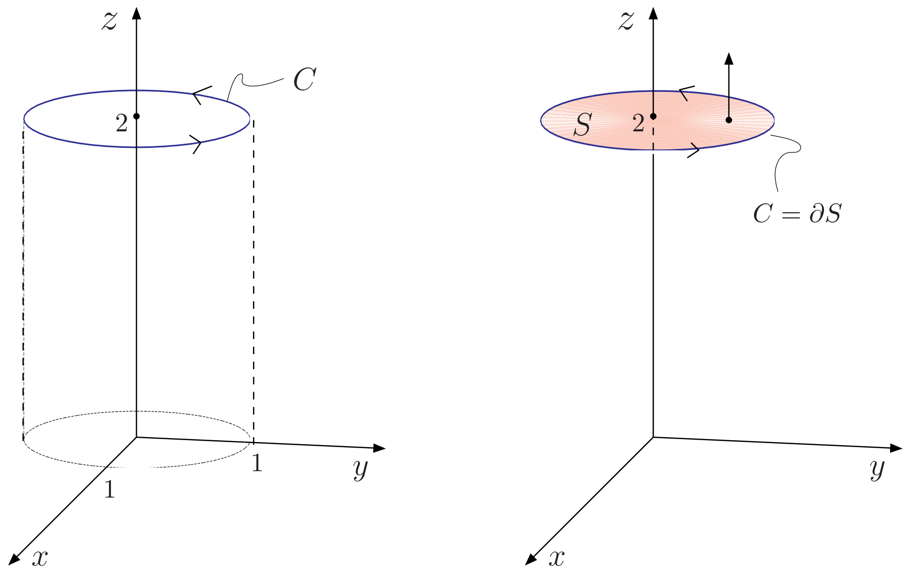
$$I = \oint_C \big(e^{-x^3/3} - yz\big) dx + \big(e^{-y^3/3} + xz + 2x\big) dy + \big(e^{-z^3/3} + 5\big) dz$$

onde C é a circunferência $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ e $z = 2$, com $t \in [0, 2\pi]$.

Solução: Calcular diretamente a integral será muito trabalhoso e como

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \overrightarrow{F} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ e^{-x^3/3} - yz & e^{-y^3/3} + xz + 2x & e^{-z^3/3} + 5 \end{vmatrix} = \\
&= (-x, -y, z + 2 + z) = (-x, -y, 2 + 2z) \neq \overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

então $\overrightarrow{F}$ não é conservativo. Assim, só nos resta aplicar o teorema de Stokes. De $C : x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ e $z = 2$, com $t \in [0, 2\pi]$, concluímos que C é dada por $x^2 + y^2 = 1$ e $z = 2$, isto é, C é



a curva de interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $z = 2$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

Observemos que C é o bordo da porção S do plano $z = 2$, limitada por C. De acordo com a orientação de $C = \partial S$, devemos tomar $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{\mathbf{k}}$. Temos $S : z = 2$, com $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$ e $dS = dxdy$. Como rot $\overrightarrow{F} = = (0, 0, 2 + 2z) = (0, 0, 6)$ em S, então, pelo teorema de Stokes, temos:

$$I = \iint\limits_S \text{rot}\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathbf{k}}\ dS = \iint\limits_S (0, 0, 6) \cdot (0, 0, 1)\ dS =$$

$$= 6 \iint\limits_S\ dS = 6A(S) = 6\left(\pi 1^2\right) = 6\pi\,.$$

Exercício 6: Calcule

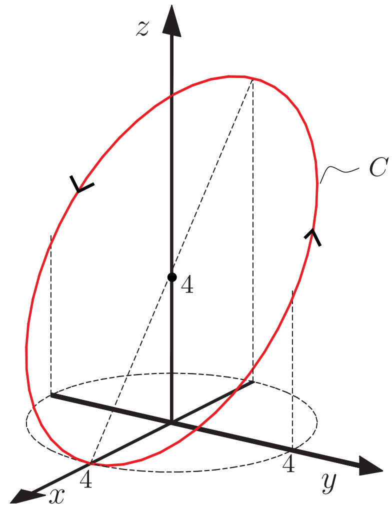
$$\int\limits_C (z - y)dx + \ln\left(1 + y^2\right)dy + \left[\ln\left(1 + z^2\right) + y\right]dz$$

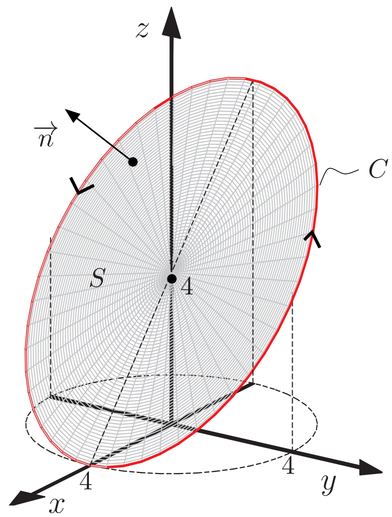
sendo C dada por $\gamma(t) = (4\cos t,\ 4\,\mathrm{sen}\, t,\ 4 - 4\cos t)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solução: Da parametrização de C, temos $x = 4\cos t$, $y = 4\,\mathrm{sen}\, t$ e $z = 4 - 4\cos t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$ donde $x^2 + y^2 = 16$ e $z = 4 - x$. Logo, C é a curva interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ com o plano $z = 4 - x$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

Seja S a porção do plano $z = 4 - x$, limitada por C.

Da regra da mão direita, vemos que $\overrightarrow{n}$ aponta para cima. A superfície S pode ser descrita por $S : z = 4 - x = f(x, y)$, com $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 16$. Temos $\overrightarrow{N} = (-f_x,\ -f_y, 1) = (1, 0, 1)$,





donde $\overrightarrow{n} = \dfrac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}$ e $dS = \sqrt{2}\ dxdy$. Temos:

$$\text{rot}\,\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z-y & \ln(1+y^2) & \ln(1+z^2)+y \end{vmatrix} = (1,1,1)\,.$$

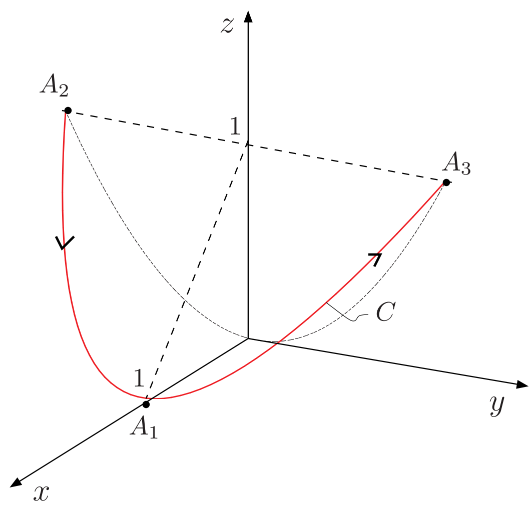
Logo, do teorema de Stokes, temos:

$$\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \iint_S \text{rot}\,\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\ dS = \iint_D (1,1,1)\cdot(1,0,1)dxdy =$$

$$= \iint_D (1+1)dxdy = 2\,A(D) = 2\cdot\pi\cdot 4^2 = 32\pi\,.$$

Exercício 7: Calcule $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, onde $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(-2y + e^{\operatorname{sen} x},\ -z + y,\ x^3 + e^{\operatorname{sen} z}\right)$ e C é a interseção da superfície $z = y^2$ com o plano $x + z = 1$, orientada no sentido do crescimento de y.

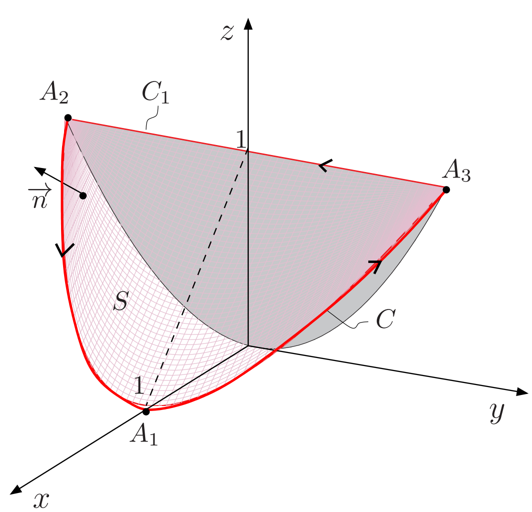
Solução: Esboçando o cilindro parabólico $z = y^2$ e o plano $x + z = 1$, vemos que os pontos A_1, A_2 e A_3 são comuns às duas superfícies. Ligando-os, temos um esboço de C.



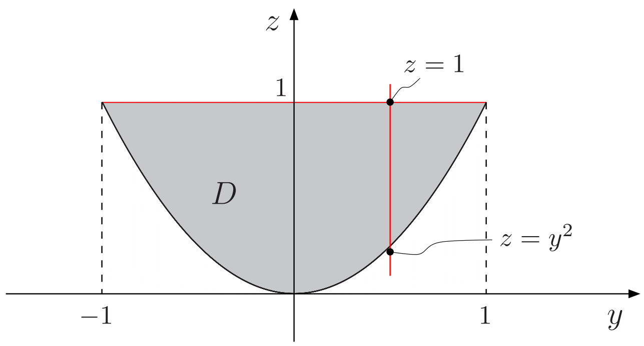
Observe que calcular $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ pela definição é uma tarefa extremamente complicada. Temos:

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -2y + e^{\operatorname{sen} x} & -z + y & x^3 + e^{\operatorname{sen} z} \end{vmatrix} = \left(1, -3x^2, 2\right) \neq \overrightarrow{0}\ .$$

Logo, $\overrightarrow{F}$ não é conservativo. Para aplicar o teorema de Stokes, devemos fechar C utilizando o segmento de reta C_1 que liga A_3 a A_2.



Seja S a porção do plano $x + z = 1$, limitada por $\overline{C} = C \cup C_1$ e que se projeta no plano yz segundo a região D cujo esboço se segue.



Descrevemos S por $S : x = 1 - z = f(y,z)$, com $(y,z) \in D : -1 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq y^2$. Considerando a orientação de $\overline{C} = \partial S$, segue que a normal a S está voltada para cima. Um vetor normal a S é $\overrightarrow{N} = (1,\ -f_y,\ -f_z) = (1,0,1)$. Logo, $\overrightarrow{n} = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}$ e $dS = \sqrt{2}\,dydz$. Pelo teorema de Stokes, temos:

$$\int_{\overline{C}} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_S \text{rot}\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\ dS = \iint_D (1, -3(1-z)^2, 2) \cdot (1,0,1) dydz =$$

$$= \iint_D (1+2) dydz = 3 \iint_D dydz = 3 \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} dzdy = 3 \int_{-1}^{1} \left(1 - y^2\right) dy =$$

$$= 3 \left[y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 6 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 4\,.$$

ou

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 4\,.$$

Cálculo de $\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$

Temos $C_1^- : z = 1$, com $x = 0$ e $-1 \leq y \leq 1$ donde $dz = dx = 0$. Então:

$$\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -\int_{C_1^-} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -\int_{C_1^-} Q(0,y,1)\ dy =$$

$$= -\int_{-1}^{1} (-1+y) dy = -\left[-y + \frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 2\,.$$

Logo:

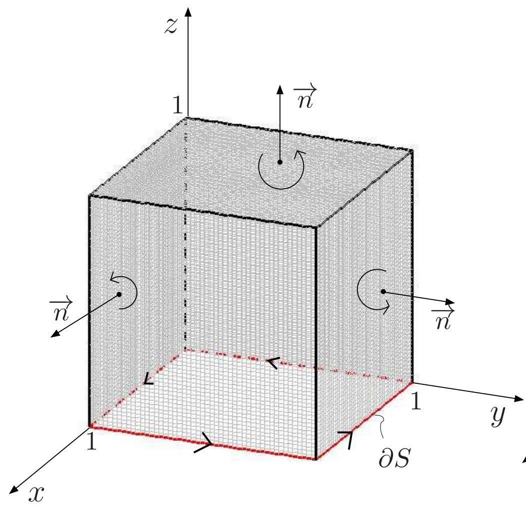
$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 4 - 2 = 2\,.$$

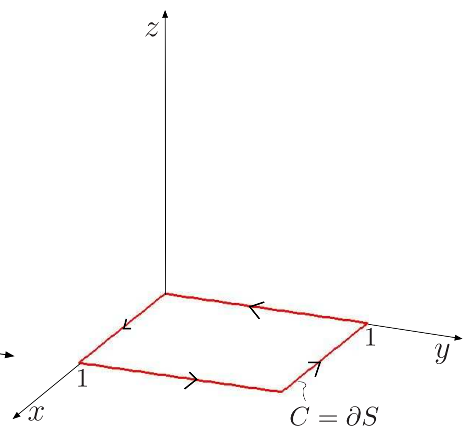
Exercício 8: Calcule $\oint_{\partial S} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, onde

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y-z)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left[\ln\left(1+y^2\right) + yz\right]\overrightarrow{\mathbf{j}} + \left(-xz + z^{20}\right)\overrightarrow{\mathbf{k}}$$

e S consiste das cinco faces do cubo $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ que não estão no plano xy, com $\overrightarrow{n}$ apontando para fora de S.

Solução: A superfície aberta de S e seu bordo ∂S estão representados na figura que se segue.



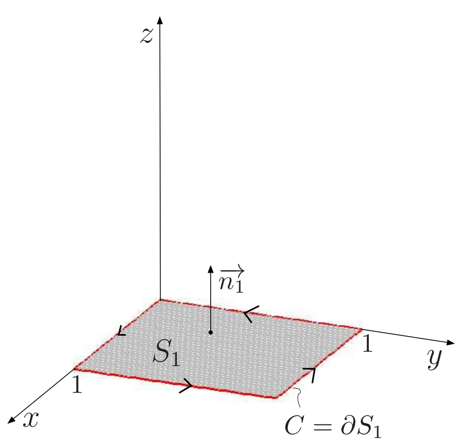


Como $\overrightarrow{n}$ é exterior, vemos que $C = \partial S$ tem orientação no sentido anti-horário quando vista de cima. Pelo teorema de Stokes, temos que:

$$\iint_S \text{rot}\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\ dS = \oint_{\partial S} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}\ .$$

Observemos que a curva $C = \partial S$ é também bordo de outra superfície S_1, porção do plano $z = 0$, limitada pela curva C. Então $C = \partial S_1$ e portanto:

$$\oint_{\partial S} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \oint_{\partial S_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}\ .$$



Como $C = \partial S_1$ está orientada no sentido anti-horário, então pela regra da mão direita, deduzimos que $\overrightarrow{n_1}$ aponta para cima: $\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{k}$. Aplicando o teorema de Stokes, para calcular $\oint\limits_{\partial S_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, temos:

$$\oint\limits_{\partial S_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint\limits_{S_1} \text{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_1}\, dS$$

onde

$$\text{rot}\,\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y - z & \ln(1+y^2) + yz & -xz + z^{20} \end{vmatrix} = (-y, -1+z, -1)\,.$$

Como a equação de S_1 é $z = 0$ com $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$ então $\text{rot}\,\overrightarrow{F} = = (-y, -1, -1)$ em S_1. Assim:

$$\oint\limits_{\partial S_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint\limits_{S_1} (-y, -1, -1) \cdot (0, 0, 1)\, dS =$$

$$= \iint\limits_{S_1} (-1)\, dS = -A(S_1) = -1^2 = -1\,.$$

Finalmente:

$$\iint\limits_{S} \text{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \oint\limits_{\partial S} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \oint\limits_{\partial S_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -1\,.$$

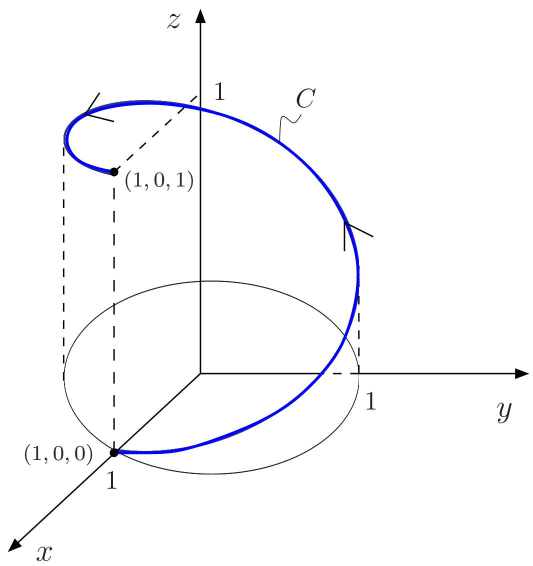
Exercício 9: Seja C a curva sobre o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ que começa no ponto $(1, 0, 0)$ e termina no ponto $(1, 0, 1)$, como mostra a figura que se segue. Calcule $\int\limits_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, onde $\overrightarrow{F}(x, y, z)$ é dado por

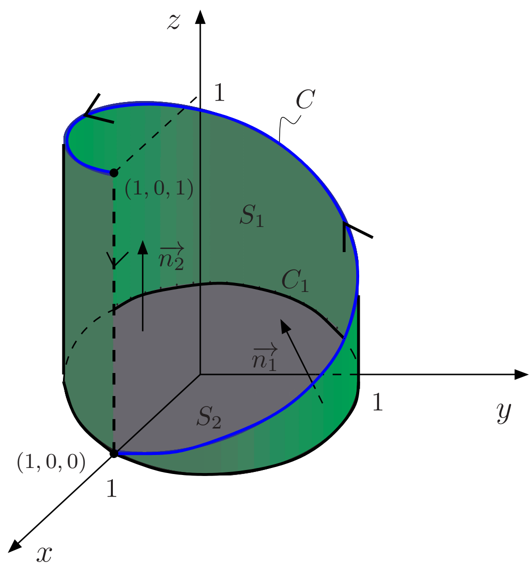
$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = y(x-2)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + x^2 y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,.$$

Solução: Seja $\overline{C} = C \cup C_1$, onde C_1 é o segmento de reta que liga $(1, 0, 1)$ a $(1, 0, 0)$. Então uma parametrização de C_1 é dada por $\sigma(t) = (1, 0, 1-t)$, $0 \leq t \leq 1$. Consideremos uma superfície S cujo bordo seja $\overline{C}$. Seja $S = S_1 \cup S_2$ onde S_1 é a porção do cilindro entre $z = 0$ e a curva $\overline{C}$ e S_2 é a porção do plano $z = 0$, limitada por $x^2 + y^2 = 1$.

De acordo com a orientação de $\overline{C}$, devemos tomar $\overrightarrow{n_1}$ e $\overrightarrow{n_2}$ apontando para dentro do cilindro, isto é, $\overrightarrow{n_1} = (-x, -y, 0)$ e $\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{\mathbf{k}}$. Temos:

$$\text{rot}\,\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y(x-2) & x^2 y & z \end{vmatrix} = (0,\ 0,\ 2xy - x + 2)\,.$$





Do teorema de Stokes, temos:

$$\oint\limits_{C=\partial S^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint\limits_{S} \text{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\ dS = \iint\limits_{S_1} \text{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_1}\ dS + \iint\limits_{S_2} \text{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_2}\ dS =$$

$$= \iint\limits_{S_1} (0,\ 0,\ 2xy - x + 2) \cdot (-x, -y, 0)\ dS\ +\ \iint_{S_2} (0,\ 0,\ 2xy - x + 2) \cdot (0,0,1)\ dS =$$

$$= \iint\limits_{S_1} 0\ dS + \iint\limits_{S_2} (2xy - x + 2)\ dS =$$

$$= \underbrace{\iint\limits_{D:x^2+y^2\leq 1} 2xy\ dxdy}_{=\ 0\ (*)} - \underbrace{\iint\limits_{D} x\ dxdy}_{=\ 0\ (*)} + 2\iint\limits_{D} dxdy = 2\,A(D) = 2\pi\,.$$

Logo:

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 2\pi \, .$$

Mas

$$\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^1 F\big(\sigma(t)\big) \cdot \sigma'(t) \; dt =$$

$$= \int_0^1 (0, 0, t) \cdot (0, 0, -1) \; dt = -\int_0^1 t \; dt = -\frac{1}{2} \, .$$

Então:

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \frac{1}{2} + 2\pi \, .$$

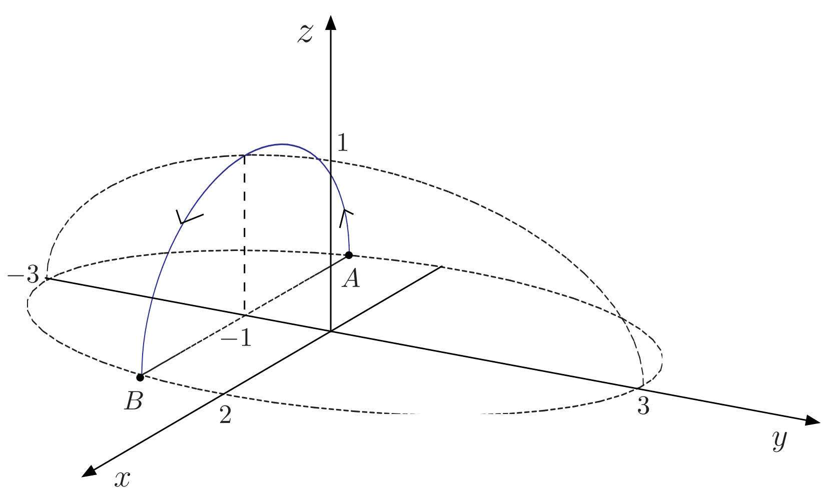
$(*)$ por simetria em integral dupla.

Exercício 10: Calcule a integral do campo vetorial

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = \left(x + y + z, z + x + e^{-y^2/2}, x + y + e^{-z^2/2}\right)$$

ao longo da curva interseção da superfície $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$, $z \geq 0$, com o plano $y = -1$, orientada no sentido do crescimento de x.

Solução: O esboço de C está representado na figura a seguir.



Para $y = -1$ e $z = 0$, temos $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{9} = 1$, donde $A = \left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}, -1, 0\right)$ e $B = \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}, -1, 0\right)$. Vemos que $\text{rot}\overrightarrow{F} = (1 - 1, 1 - 1, 1 - 1) = \overrightarrow{0}$ e que $\text{dom}\overrightarrow{F} = \mathbb{R}^3$ é um conjunto simplesmente conexo. Então, pelo Teorema das Equivalências em $\mathbb{R}^3$, a integral $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ não depende do caminho que liga o ponto A ao ponto B. Assim, consideremos o segmento de reta AB, dado por $C_1 : y = -1$ e $z = 0$, com $\frac{-4\sqrt{2}}{3} \leq x \leq \frac{4\sqrt{2}}{3}$. Temos que $dy = dz = 0$. Então:

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{C_1} P(x,-1,0)\, dx =$$

$$= \int_{-4\sqrt{2}/3}^{4\sqrt{2}/3} (x - 1 + 0)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{-4\sqrt{2}/3}^{4\sqrt{2}/3} = -\frac{8\sqrt{2}}{3}\,.$$

Exercício 11: Calcule

$$\int_C \left(y^2 \cos x + z^3\right) dx - (4 - 2y \operatorname{sen} x)\, dy + \left(3xz^3 + 2\right) dz$$

sendo C a hélice $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ e $z = t$, com $t \in [0, 2\pi]$.

Solução: Fazendo

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(y^2 \cos x + z^3\right) \overrightarrow{\mathbf{i}} + (-4 + 2y \operatorname{sen} x)\, \overrightarrow{\mathbf{j}} + \left(3xz^3 + 2\right) \overrightarrow{\mathbf{k}}$$

temos que:

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 \cos x + z^3 & -4 + 2y \operatorname{sen} x & 3xz^3 + 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(0, 3z^2 - 3z^2, 2y \cos x - 2y \cos x\right) = \overrightarrow{0}\,.$$

Como dom $\overrightarrow{F} = \mathbb{R}^3$ que é um conjunto simplesmente conexo, então pelo teorema das equivalências em $\mathbb{R}^3$, temos que $\overrightarrow{F}$ é conservativo. Portanto, $\overrightarrow{F}$ admite uma função potencial $\varphi(x,y,z)$ que satisfaz

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = y^2 \cos x + z^3 \quad (1)$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -4 + 2y \operatorname{sen} x \quad (2)$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 3xz^2 + 2 \quad (3)\,.$$

Integrando (1), (2) e (3) em relação a x, y e z, respectivamente, encontramos:

$$\varphi(x,y,z) = y^2 \operatorname{sen} x + xz^3 + f(y,z) \quad (4)$$
$$\varphi(x,y,z) = -4y + y^2 \operatorname{sen} x + g(x,z) \quad (5)$$
$$\varphi(x,y,z) = xz^3 + 2z + h(x,y) \quad (6)\,.$$

Para encontrar a mesma expressão para $\varphi(x,y,z)$ devemos tomar $f(y,z) = = -4y+2z$, $g(x,z) = xz^3 + 2z$ e $h(x,y) = y^2 \operatorname{sen} x - 4y$. Substituindo em (4), (5) e (6) encontramos $\varphi(x,y,z) = y^2 \operatorname{sen} x + xz^3 - 4y + 2z$. Assim, pelo teorema fundamental do cálculo para integrais de linha, temos

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \varphi\left(\gamma(2\pi)\right) - \varphi\left(\gamma(0)\right)$$

onde $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$. Como $\gamma(2\pi) = (1,0,2\pi)$ e $\gamma(0) = (1,0,0)$, temos:

$$\begin{aligned}\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \varphi(1,0,2\pi) - \varphi(1,0,0) = \\ &= \left(0 + (2\pi)^3 - 0 + 2 \cdot 2\pi\right) - (0 + 0 - 0 + 0) = \\ &= 8\pi^3 + 4\pi = 4\pi\left(2\pi^2 + 1\right) .\end{aligned}$$

Exercício 12: Seja $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (yz + x^2, xz + 3y^2, xy)$.

a) Mostre que $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ é independente do caminho.

b) Calcule $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, onde C é a curva obtida como interseção da superfície $z = 9 - x^2 - y^2$, $z \geq 4$ com o plano $y = 1$, orientada no sentido do crescimento de x.

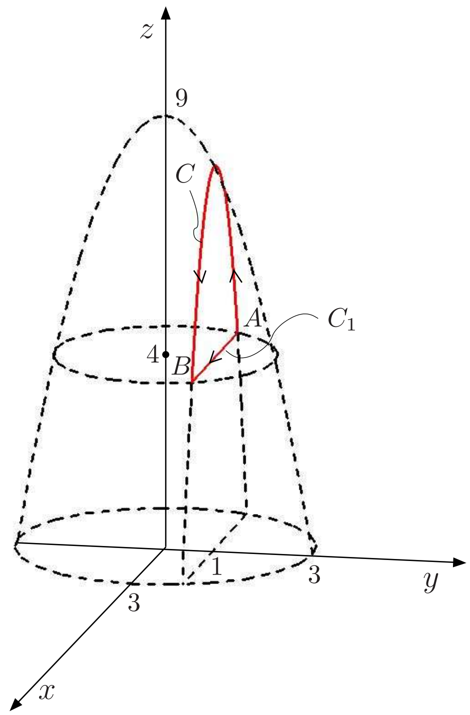
Solução:

a) Temos que dom$\overrightarrow{F} = \mathbb{R}^3$ que é um conjunto simplesmente conexo. Além disso,

$$\text{rot}\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz + x^2 & xz + 3y^2 & xy \end{vmatrix} = (x - x, y - y, z - z) = \overrightarrow{0} .$$

Então pelo teorema das equivalências, segue que $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ é independente do caminho.

b) De $z = 9 - x^2 - y^2$, $y = 1$ e $z = 4$ temoa $4 = 9 - x^2 - 1$ donde $x^2 = 4$. Logo, $x = \pm 2$. Assim, o ponto inicial de C é $A = (-2,1,4)$ e o ponto final é $B = (2,1,4)$. O esboço de C está representado na figura que se segue.



Como I não depende de C, então consideremos o segmento C_1 que liga A a B. Temos que C_1 é dado por $C_1 : \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ y = 1 \\ z = 4 \end{cases}$. Logo, $dy = 0$ e $dz = 0$. Então:

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{-2}^{2} P(x,1,4)\, dx = \int_{-2}^{2} \left(4 + x^2\right)\, dx =$$

$$= \left[4x + \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = 2\left(8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{64}{3}\,.$$

Exercício 13: A integral

$$\int_C 2xe^{2y}\, dx + 2\left(x^2 e^{2y} + y\cos z\right)\, dy - y^2 \operatorname{sen} z\, dz$$

é independente do caminho? Calcule o valor da integral para a curva C obtida como interseção da superfície $z = 9 - x^2 - y^2$, com $z \geq 5$ com o plano $x = 1$, orientada no sentido de crescimento de y.

Solução: O campo

$$\vec{F} = (P, Q, R) = \left(2xe^{2y}, 2\left(x^2 e^{2y} + y\cos z\right), -y^2 \operatorname{sen} z\right)$$

é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, que é um conjunto simplesmente conexo. Como

$$\begin{aligned}\text{rot}\,\vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xe^{2y} & 2\left(x^2e^{2y} + y\cos z\right) & -y^2 \operatorname{sen} z \end{vmatrix} = \\ &= \left(-2y \operatorname{sen} z + 2y \operatorname{sen} z, 0, 4xe^{2y} - 4xe^{2y}\right) = \vec{0}\end{aligned}$$

então, pelo teorema das equivalências, a integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ não depende de C.

De $z = 9 - x^2 - y^2$, $z = 5$ e $x = 1$ temos $5 = 9 - 1 - y^2$ donde $y^2 = 3$ e $y \pm \sqrt{3}$. Considerando que C está orientada no sentido de crescimento de y, concluímos que o ponto inicial de C é o ponto $A = (1, -\sqrt{3}, 5)$ e o ponto final de C é $B = (1, \sqrt{3}, 5)$. Como $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ não depende de C, então vamos substituir C por C_1, segmento de reta que liga A a B. Então temos $C_1 : x = 1$, $z = 5, -\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$ donde $dx = 0$ e $dz = 0$. Então:

$$\begin{aligned}&\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} P(1,y,5)\,dx + Q(1,y,5)\,dy + R(1,y,5)\,dz \overset{(*)}{=} \\ &\overset{(*)}{=} \int_{C_1} Q(1,y,5)\,dy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 2\left(1^2e^{2y} + y\cos 5\right)\,dy = \\ &= 2\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(e^{2y} + y\cos 5\right)\,dy = 2\left[\frac{e^{2y}}{2} + \frac{y^2}{2}\cos 5\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \\ &= \left(e^{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2}\cos 5\right) - \left(e^{-2\sqrt{3}} + \frac{3}{2}\cos 5\right) = e^{2\sqrt{3}} - e^{-2\sqrt{3}}\,.\end{aligned}$$

Em $(*)$ temos que $dx = 0$ e $dz = 0$.