SEQUÊNCIAS

1. INTRODUÇÃO

A palavra sequência é usada em linguagem corrente para significar uma sucessão de coisas dispostas numa ordem definida. Neste curso, estamos interessados em sequências de números como:

$$\mathbf{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12} \quad \text{ou como} \quad \mathbf{0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,\ \ldots}$$

Cada número na sequência é chamado *termo*. A sequência que tem um número finito de termos, tal como a primeira, é chamada de *sequência finita*. A segunda sequência envolve um infinito número de termos e, portanto, é uma *sequência infinita*.

É claro que não podemos listar todos os termos de uma sequência infinita, por isso, nós lançamos mão da convenção de escrever uns poucos primeiros termos e então colocamos os três pontos para significar "e assim por diante".

Nesse curso nosso interesse é com sequências infinitas somente.

$$\boldsymbol{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots,\ a_n, \ldots}$$

2. SEQUÊNCIAS

Sequência infinita ou, mais simplesmente, sequência**,** é uma função definida para todos os números inteiro positivos $\boldsymbol{n}$, pontanto, de domínio $\mathbb{Z}_+^*$.

Embora matematicamente uma sequência é definida como uma função, é comum representá-la pela notação indexada...

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{1,} & \mathbf{2,} & \mathbf{3,} & \mathbf{4,} & \ldots, & \boldsymbol{n,} & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{a_4} & \ldots & \boldsymbol{a_n} & \ldots \end{array}$$

... em vez da notação padrão $f(n)$.

- Os números $\boldsymbol{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots,\ a_n}$, são denominados *termos* da sequência;
- $\boldsymbol{a_n}$ é o *enésimo termo ou termo geral* e *n* é o índice, mas, pode ser outra letra, por exemplo $\boldsymbol{k\ (a_k)}$;
- A notação da sequência toda é feita por $\{\boldsymbol{a_n}\}$ ou $(\boldsymbol{a_n})$ ou ainda $a_n = \text{"}regra\ ou\ fórmula\text{"}$;
- Os pontos (...) significam "*e assim por diante*" usados para indicar que a sequência continua indefinidamente.
- Sequências diferentes podem ser distinguidas por letras diferentes: $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, etc

Exemplos de sequências:

$a)\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots$

$b)\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots$

$c)\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots$

$d)\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots$

$e)\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots$

$f)\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16},\ \ldots$

$g)\ \frac{1}{2}, -\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ -\frac{4}{5},\ \ldots$

- É importante perceber que os números numa sequência aparecem dentro de uma ordem definida e também repetições desses números são permitidas.

- Às vezes uma listagem de uns poucos termos de uma sequência indica sem deixar qualquer dúvida a regra ou fórmula que determina o termo geral.

3. TERMO GERAL DE UMA SEQUÊNCIA

Algumas vezes os termos de uma sequência são gerados por alguma regra que não é explicitada.

Nestes casos, você pode precisar encontra essa regra ou padrão na sequência, embora muitas vezes pode tornar-se difícil, se não impossível, determinar a regra geral desejada através de um exame do exemplo numérico formado por alguns termos.

Portanto é melhor explicitar uma regra ou fórmula que relacione cada termo da sequência ao número de sua posição, para gerar os termos. Algumas sequências são definidas recursivamente. Para tanto é preciso conhecer um ou mais dos primeiros termos. Todos os outros termos da sequência serão então definidos usando os termos anteriores.

Em outras palavras é melhor ter uma regra ou fórmula (termo geral) de uma sequência para gerar seus termos do quê o contrário.

Uma vez que o termo geral tenha sido especificado, podemos investigar a convergência ou divergência da sequência, como veremos mais adiante.

$a)\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots \Longrightarrow \{n\}_{n\,=\,1}^{+\infty}\ \boldsymbol{ou}\ a_n = n$

$b)\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots \Longrightarrow \{2n\}_{n\,=\,1}^{+\infty}\boldsymbol{ou}\ b_n = 2n$

$c)\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots \Longrightarrow \{2n-1\}_{n\,=\,1}^{+\infty} ou\ c_n = 2n-1$

$d)\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots \Longrightarrow \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\,=\,1}^{+\infty}\ \boldsymbol{ou}\ d_n = \frac{1}{n}$

Quando for usada a notação entre chaves, não é essencial o índice em 1, com referência a n. Às vezes é mais conveniente começar em zero, ou algum outro número inteiro.

$e)\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots = \{(-1)^{n-1}\}_{n\,=\,1}^{+\infty}$ ou $\{(-1)^{n}\}_{n\,=\,0}^{+\infty}$

Quando o valor inicial do índice de uma sequência não for relevante, é comum usar uma notação sem fazer referência a n: $\{a_n\}$

$f)\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \dots \Rightarrow \{(-1)^{n-1}\}\ \boldsymbol{ou}\ f_n = (\mathbf{-1})^{\boldsymbol{n-1}}$

$g)\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\ \dots \Rightarrow \left\{\frac{1}{2^n}\right\}\ \boldsymbol{ou}\ p_n = \frac{1}{2^n}$

$h)\ \frac{1}{2},-\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ -\frac{4}{5},\ \dots \Rightarrow \left\{\ (-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}\right\}\ \boldsymbol{ou}\ t_n = (\mathbf{-1})^{\boldsymbol{n-1}}\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n+1}}$

Quando o termo geral de uma sequência $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots,\ a_n, \dots$ for conhecido, não há necessidade de escrever os termos iniciais.

Exemplo:

$$\left\{\frac{n}{3n+1}\right\} = \frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{3}{10},\frac{4}{13},\dots,\frac{n}{3n+1},\dots$$

EXERCÍCIOS

1. Liste os termos da sequência:

$a)\ \{3+(-1)^n\};$ $\qquad b)\ a_k = 6-\frac{3}{k^2};$ $\qquad c)\ \left\{\frac{2n}{3n-2}\right\}$

2. Escreva os primeiros termos de cada uma das sequências definidas recursivamente.

$a)\ a_1 = 3\ e\ a_{n+1} = a_n - 2$ $\qquad c)\ a_1 = \frac{1}{3}\ e\ a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$

$b)\ a_1 = 4\ e\ a_{n+1} = \frac{n+1}{n}.a_n$ $\qquad d)\ a_1 = 2\ e\ a_{n+1} = (a_n)^n$

3. Escreva o termo geral de cada uma das sequências:

$a)\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \dots;$ $\qquad b)\ 10,\ 10^2,\ 10^3,\ 10^4,\ \dots;$ $\qquad c)\ \frac{1}{2},\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \dots$

Insistimos em lembrar que

Uma sequência é uma função cujo domínio é o conjunto dos números inteiros. Especificamente, consideremos a expressão...

$$\{\boldsymbol{a_n}\}\ \boldsymbol{ou}\ \ \boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{'regra\ ou\ f\acute{o}rmula'}$$

...como sendo uma notação alternativa para a função

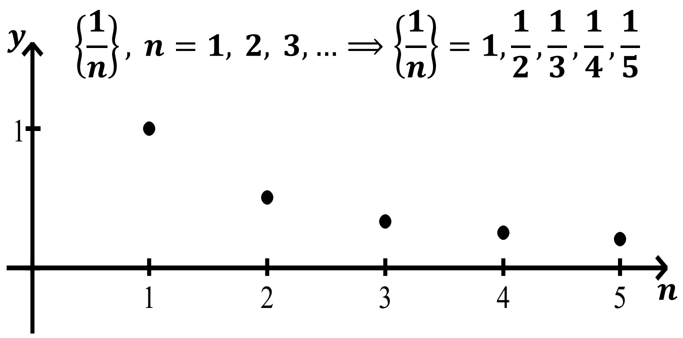
$$\boldsymbol{f(n) = a_n,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots}$$

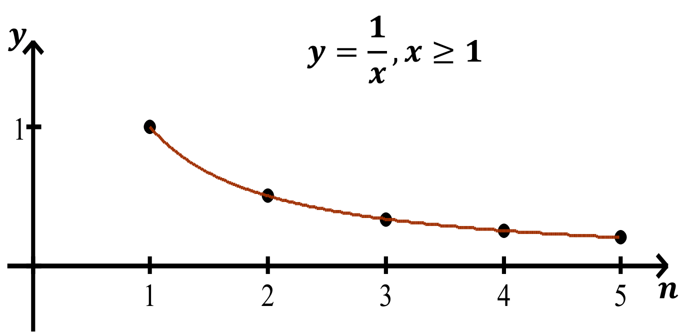
4. GRÁFICO DE UMA SEQUÊNCIA

Uma vez que sequências são funções, faz sentido falar sobre o gráfico delas. Por exemplo, o gráfico da sequência...

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} \; ou \; a_n = \frac{1}{n}$$

É o gráfico da função $f(n) = y = \frac{1}{n}, \; n = 1, \, 2, \, 3, \; \ldots$





5. LIMITES DE UMA SEQUÊNCIA

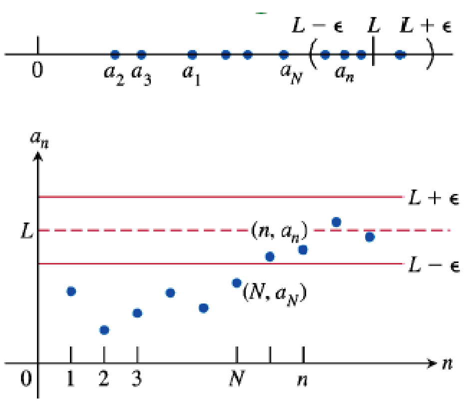
Uma vez que a_n só está definida para valores inteiros de n, só faz sentido calcular o limite de uma sequência a_n se esta tende ao infinito:

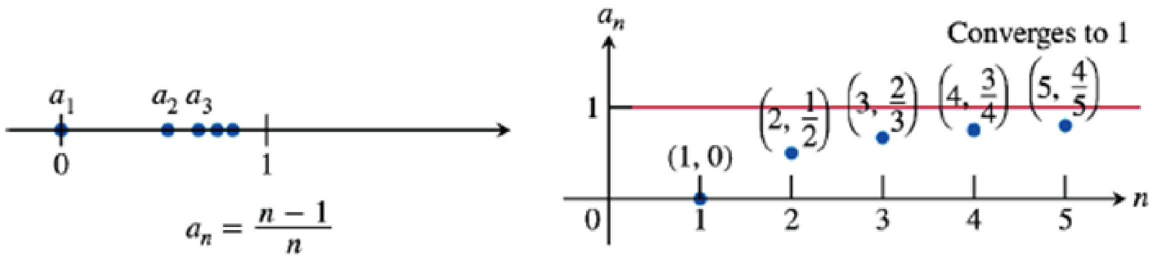
$$\lim_{n \to +\infty} a_n$$

OBSERVAÇÃO: muitos livros trazem $+\infty = \infty$

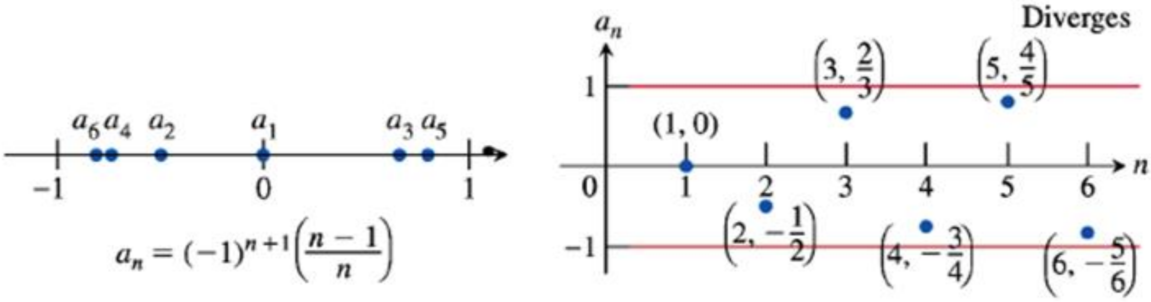
$$\lim_{n \to \infty} a_n$$

Informalmente, o limite de uma sequência $\{a_n\}$ pretende descrever a_n se comporta quando $n \to \infty$ Para sermos mais específico, diremos que uma sequência $\{a_n\}$ tende a um limite L se os termos da sequência tornam-se, finalmente, arbitrariamente próximos de L. Geometricamente, isso significa que para qualquer número ε positivo há um ponto na sequência após o qual todos os termos estão entre as retas $y = L - \varepsilon$ e $y = L + \varepsilon$. Vejamos:

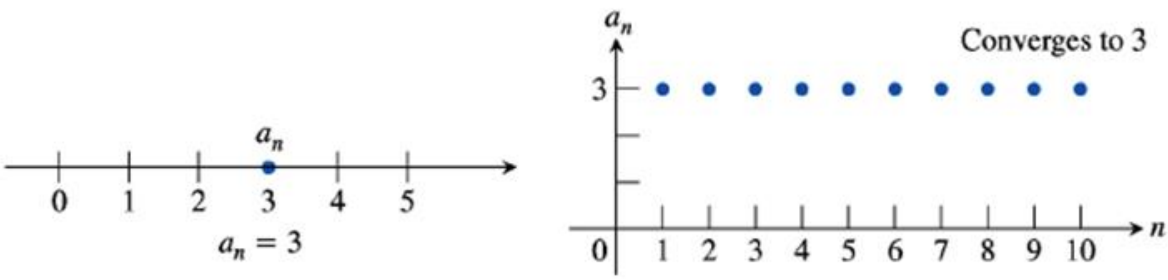




$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\boldsymbol{n-1}}{\boldsymbol{n}} = 1$$



$$\nexists \lim_{n\to+\infty}\left((-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n+1}}\left(\frac{\boldsymbol{n-1}}{\boldsymbol{n}}\right)\right)$$



$$\lim_{n\to+\infty} 3 = 3$$

Dizemos que uma sequência $\{a_n\}$ ***converge*** para o limite L se dado qualquer $\varepsilon > 0$, existir um número inteiro positivo N, tal que $|a_n - L| < \varepsilon$, qualquer que seja $n \geq N$ e escrevemos:

$$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} a_n = L \quad ou \quad a_n \to L \; quando \; n \to +\infty}$$

Dizemos que uma sequência ***diverge*** quando não convergir para algum limite finito (número real).

Intuitivamente, $L \in \mathbb{R}$ é o limite de uma sequência, quando os termos da mesma aproximam-se cada vez mais de L, quando $n \to +\infty$.

EXERCÍCIOS

4. Em cada caso, determine se a sequência converge ou diverge. Se convergir, encontre seu limite:

$a)\ \{n+1\};$ $\quad b)\ \{(-1)^{n+1}\};$ $\quad c)\ \left\{\frac{n}{2n+1}\right\};$ $\quad d)\ \left\{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

$e)\ \left\{6-\frac{3}{n^2}\right\};$ $\quad f)\ \left\{(-1)^{n+1}\frac{n}{2n+1}\right\};$ $\quad g)\ \{8-2n\};$ $\quad h)\ \left\{\frac{6n^2-1}{6n^2}\right\}$

5. Determine o limite de cada sequência dada, desde que ela seja convergente:

$a)\ \left\{\frac{3n^2+7n+1}{8n^2-5n+3}\right\}$ $\quad b)\ \left\{\frac{2^n}{3^{n+1}}\right\}$ $\quad c)\ \left\{n\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2n}\right\}$ $\quad d)\ \left\{\frac{4-7n^6}{n^6+3}\right\}$ $\quad e)\ \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$

$f)\left\{\frac{n^3+5n}{7n^2+1}\right\}$ $\quad g)\ \left\{\frac{n^2}{2^n-1}\right\}$ $\quad h)\left\{-\frac{1}{n}\right\}$ $\quad i)\ \left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ $\quad j)\ \left\{\frac{5}{n^2}\right\}$

6. Mostre que a sequência $\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}$ converge e encontre seu limite

***SUGESTÃO: Faça os exercícios do Livro* Cálculo – Vol. 2, 8.ed. de George B. Thomas. Pag. 10 e 11**

6. SEQUÊNCIAS DEFINIDAS RECURSIVAMENTE

Se uma sequência tem a fórmula para o termo geral definida a partir de termos antecedentes dizemos que são definidas recursivamente e as fórmulas que a definem são chamadas fórmulas de recursão ou (fórmula recursiva). Neste caso:

1) É dado o valor do termo inicial
2) É dada a regra para calcular qualquer termo posterior a partir de termos que o precedem.

$$\boldsymbol{a_1=2;\ a_{n+1}=3(a_n)^{-1}-1 \quad e \quad x_1=1;\ x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)}$$

Exemplos:

Encontre os cinco primeiros termos das sequências e classifique-as em crescente ou decresc.

$a)\ a_1=1;\ a_n=a_{n-1}+1;\ b)\ a_1=1;\ a_n=n\cdot a_{n-1};\ c)\ a_1=1, a_2=1$ e $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$

Há muitas situações nas quais é importante saber se uma sequência converge, sendo, todavia, irrelevante para o problema o valor do limite. Nesta seção, vamos estudar várias técnicas que podem ser usadas para determinar se uma sequência converge.

TEOREMA: Uma sequência converge para um limite L se, e somente se, as ***subsequências*** dos termos de posição par e dos termos de posição ímpar convergem ambas para L.

Exemplos clássicos: $a)\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{2^2},\frac{1}{3^2},\frac{1}{2^3},\frac{1}{3^3}\ldots$ $\qquad b)1,\frac{1}{2},1,\frac{1}{3},1,\frac{1}{4},\ldots$

7. SUBSEQUÊNCIAS

Se os termos de uma sequência aparecem em outra sequência na ordem dada delas, chamamos a primeira de subsequência da segunda.

Exemplos: Subsequências da sequência dos inteiros positivos

a) Subsequência dos inteiros pares: 2, 4, 6, ..., 2n
b) Subsequência dos inteiros ímpares: 1, 3, 5, 7, ..., 2n - 1
c) Subsequência dos inteiros primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...
d) Subsequência dos quadrados perfeitos: 1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2

Importância das subsequências:

1. Se uma sequência converge para L, então todas as suas subsequências convergem para L. Se soubermos que uma sequência converge, poderá ser mais rápido encontrar ou estimar seu limite examinando uma determinada subsequência.
2. Se qualquer subsequência de uma sequência divergem ou se duas subsequências têm limites diferentes, então diverge.
   Por exemplo: $(-1)^n$ diverge por que a subsequência $-1, -1, -1 \dots$ de termos ímpares converge para -1, enquanto a subsequência 1, 1, 1, ... de termos pares converge para 1. Seus limites são diferentes.

8. SEQUÊNCIAS MONOTÔNICAS OU MONÓTONAS

DEFINIÇÃO: Dizemos que uma sequência $\{a_n\}$, é:

- Crescente, se $a_n \leq a_{n+1}$;
- Estritamente crescente, se $a_n < a_{n+1}$;
- Decrescente, se $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n$;
- Estritamente decrescente, se $a_n > a_{n+1}$

Se uma sequência é crescente ou decrescente, ela é chamada **MONÓTONA.** Se é estritamente crescente ou estritamente decrescente é **ESTRITAMENTE MONÓTONA**.

Exemplos:

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$ Estritamente Crescente

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ Estritamente Decrescente

1, 1, 2, 2, 3, 3,... Crescente, mas, não estritamente

$1,\ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots$ Decrescente mas, não estritamente

$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \dots$ Nem crescente e nem decrescente

9. TESTE DE MONOTONICIDADE

Para saber se uma sequência é monótona ou estritamente monótona, devemos mostrar que as condições abaixo valem para todos pares de termos sucessivos da sequência.

Vejamos duas maneiras de fazer isso:

Diferença entre termos sucessivos:

- $a_{n+1} - a_n > 0 \rightarrow$ Estritamente crescente
- $a_{n+1} - a_n < 0 \rightarrow$ Estritamente decrescente
- $a_{n+1} - a_n \geq 0 \rightarrow$ Crescente
- $a_{n+1} - a_n \leq 0 \rightarrow$ Decrescente

Razão de termos sucessivos:

- $a_{n+1}/a_n > 1 \rightarrow$ Estritamente crescente
- $a_{n+1}/a_n < 1 \rightarrow$ Estritamente decrescente
- $a_{n+1}/a_n \geq 1 \rightarrow$ Crescente
- $a_{n+1}/a_n \leq 1 \rightarrow$ Decrescente

OBSERVAÇÃO: Dado o termo geral da sequência a_n, para acha a_{n+1}, basta substituir em a_n, n por $n+1$.

Exemplos:

Faça ambos os testes de monotonicidade nas sequências:

$a)\ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}$ $\quad b)\ \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \dots, \frac{n}{2n+1}$ $\quad c)\ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$

9.1. Sequências com propriedades a partir de um certo termo

DEFINIÇÃO: Se no começo de uma sequência, puder ser descartada uma quantidade finita de termos e com isso for produzida uma nova sequência com uma certa propriedade, dizemos que a sequência original tem essa propriedade ***a partir de um certo termo***.

Exemplo:

1. Embora não podemos afirmar que a sequência $(9, -8, -17, 12, 1, 2, 3, 4, \dots)$ seja estritamente crescente, podemos afirmar que ela é ***estritamente crescente a partir do 5º termo.***

9.2. Convergência de sequências monótonas

A convergência ou a divergência de uma sequência não depende do comportamento de seus termos iniciais, mas sim, de como os termos se comportam a partir de um certo termo.

$3, -9, -13, 17, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots$, a partir de um certo termo comporta − se como sequência

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots, \frac{1}{n}, \dots$ e logo tem um limite igual a zero.

Uma sequência monótona ou converge ou torna-se infinita, não podendo ocorrer divergência por oscilação.

TEOREMA: Se uma sequência $\{a_n\}$ for crescente, a partir de um certo termo, então há duas possibilidades:

a) Existe uma constante M, chamada de ***cota superior (ou limitante superior)*** para a sequência, tal que $a_n \leq M$, $\forall n$ a partir de um certo termo e, nesse caso, a sequência converge para um limite L satisfazendo $L \leq M$.
b) Não existe cota inferior e, nesse caso, $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

TEOREMA : Se uma sequência $\{a_n\}$ for decrescente, a partir de um certo termo, então há duas possibilidades:

a) Existe uma constante ***m***, chamada de ***cota inferior (ou limitante inferior)*** para a sequência, tal que $a_n \geq m$, $\forall n$ a partir de um certo termo e, nesse caso, a sequência converge para um limite L satisfazendo $L \geq m$.
b) Não existe cota inferior e, nesse caso, $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$

Exemplos: Mostrar que a sequência $\left\{\frac{10^n}{n!}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ converge e encontre o limite.

10. TEOREMA DA FUNÇÃO CONTÍNUA PARA SEQUÊNCIAS

Seja $\{a_n\}$ uma sequência de números reais.
Se $a_n \to L$ e se $f(x)$ for uma função contínua em L e definida $\forall a_n$, então $f(a_n) \to f(L)$

Essa regra associa valores de uma função (geralmente derivável) a valores de uma dada sequência e é utilizada para encontra o limite de algumas sequências.

TEOREMA : suponha que $f(x)$ seja uma função definida para todo $x \geq n_0$ e que $\{a_n\}$ seja uma sequência de números reais tal que $a_n = f(n)$ para $n \geq n_0$. Então:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} a_n = L.$$

Quando usamos a Regra de l'Hopital para encontrar o limite de uma sequência, frequentemente tratamos n como uma variável real contínua e diretamente derivável em relação a n. Isso evita que reescrevamos a fórmula para a_n.

11. SEQUÊNCIA LIMITADA

DEFINIÇÃO 1: Diz – se que uma sequência é **limitada inferiormente** se existe um número m, denominado cota inferior (ou limitante inferior) de uma sequência $\{a_n\}$, se m é menor ou igual a qualquer termo da sequência $(m \leq a_n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+^*$

DEFINIÇÃO 2: Diz – se que uma sequência é **limitada superiormente** se existe um número M, denominado cota superior (ou limitante superior) de uma sequência $\{a_n\}$, se M é maior ou igual a qualquer termo da sequência $(a_n \leq M)$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+^*$

DEFINIÇÃO 3: Diz – se que uma sequência é **limitada** se é tanto limitada inferior quanto superiormente.

OBSERVAÇÃO: Se uma sequência converge, ela é limitada, entretanto, uma sequência limitada não converge necessariamente.

TEOREMA: Toda sequência Monotônica limitada inferiormente ou superiormente é convergente.

Exemplos:

Determinar se cada sequência dada é limitada inferiormente ou superiormente, se converge ou diverge, se é crescente ou decrescente ou não monótona:

$a)\ \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ $\qquad b)\ \left\{(-1)^n\frac{2n}{3n+1}\right\}$

EXERCÍCIOS

Determinar se cada sequência dada é limitada inferiormente ou superiormente, se converge ou diverge, se é crescente ou decrescente ou não monótona:

$a)\ 1, 2, 3, \dots, n$ $\qquad b)\ \{(-1)^n n\}$ $\qquad c)\ \left\{\frac{2n+1}{3n+2}\right\}$ $\qquad d)\ \left\{\frac{3^n}{1+3^n}\right\}$ $\qquad e)\ \left\{\frac{(-1)^n n}{n+1}\right\}$ $\qquad f)\ \left\{\frac{n^n}{n!}\right\}$

BIBLIOGRAFIAS CONSULTADAS

HOFFMANN, Laurence D; **BRADLEY**, Gerald L. **Cálculo: um curso moderno e suas aplicações: tópicos avançados.** 10. ed. – Rio de Janeiro: LTC, 2010. Pág. 63 a 103.

HOWARD, Anton; **BIVENS**, Irl; **DAVIS**, Stephen. **Cálculo**. Vol. 2. 8 ed. – Porto Alegre: Bookman, 2007.

LARSON, Ron; **HOSTETLER**, Robert P.; **EDWARDS**, Bruce H. **Cálculo**. Vol. 2, 1. ed. – São Paulo: McGraw – Hill, 2006.

LEITHOLD, L.; **PATARRA,** C. C.; **FERREIRA,** W. C.; **PREGNOLATTO,** S. **O Cálculo com Geometria Analítica.** Vol. 2. 3. Ed. São Paulo: Harbra, 1994.

MUNEM & FOULIS. Cálculo. Vol.2 – pág. 621 a 631

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**. Vol. 2. São Paulo: Pearson Makron Books, 1988. Pág. 6 – 66.

STEWART, James. **Cálculo.** Vol. 1. 3 ed. – São Paulo: Thomson Pioneira, 2002.

THOMAS, George B. Cálculo. Vol.2 – pág. 26 a 35.